第二部分 解析函数论的应用

第六章 位 势 论

6.1 物理学中的Laplace方程

位势论的主要部分是研究调和函数的。三維调和函数是在三維空间某个域內滿足Laplace方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$，且在域的边界上滿足一定条件的函数。如果由于某种理由，已知函数 u 与第三个坐标 z 无关，则有二維 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$。我们已知一个复变量的解析函数的实部（或虛部）在其解析域內滿足二維 Laplace 方程。由于这个原因，解析函数论在二維位势论的研究中成了有力的工具。在这一章中，我们将从这个观点来研究位势的理论，并说明若干典型的边値问题是如何解决的。在讨论位势论的开始阶段，我们首先考虑某些常见的物理问题，从这些问题，可以导出调和函数。

流体动力学 考虑三維空间的一个部分，它为某种均匀流体所占据。设流体以速度 $v(x,y,z,t)$流动，这个速度是流体中靠近点(x,y,z)的一切分子在时刻 t 的平均速度。设在时刻 t 在点(x,y,z) 处流体的密度是 $\rho(x,y,z,t)$，它是在时刻 t 及在点 (x,y,z) 处每单位体积內的质量。在上述区域中考虑任意的具有光滑曲面 S 和固定的体积 V，在 t 时刻，此体积中流体的总质量为

$$M(t)=\iiint_V \rho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz.$$

由于体积是固定的，故单位时间内质量的改变完全是由于质量随时间变化所引起，即

$$\frac{dM}{dt}=\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz.$$

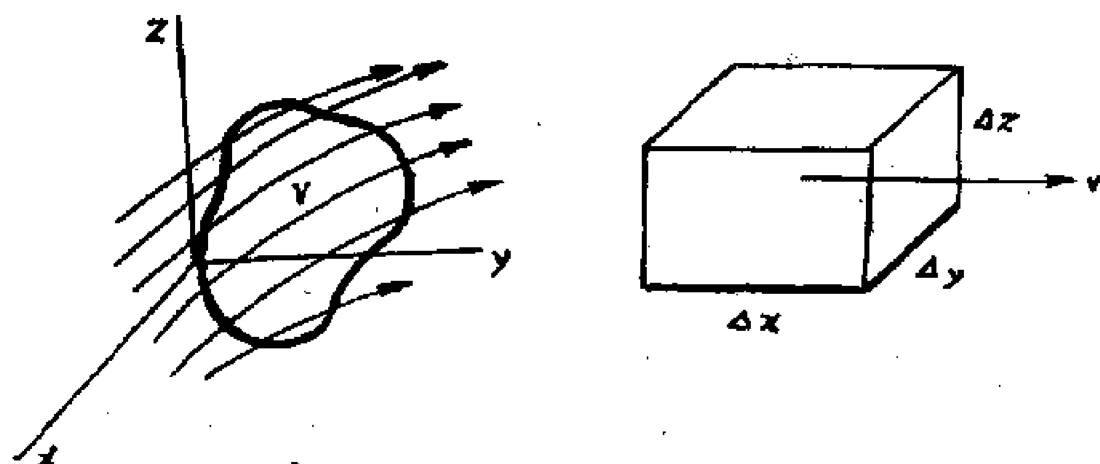


图 6.1.1

假设在V内没有源或洞，换言之，流体除通过曲面S外，流体没有其他方式进入或离开体积V.

考虑空间一体积元素，其边长为Δx，Δy，Δz，见图6.1.1.

设在此体积元素中所有分子的速度是$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\ 0,\ 0\right)$,并设其总质量为$\Delta m$. 在时间间隔$\Delta t$内，有质量为$\Delta m$的流体流经面积为$\Delta y\cdot\Delta z$的曲面，即流经所给体积元素的一端。显见，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta m}{\Delta t}&=\frac{\Delta m}{\Delta V}\ \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta S\\&=\rho v_x\Delta S,\end{aligned}$$

其中$\Delta V=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$，$\Delta S=\Delta x\cdot\Delta y$，并且$v_x$是垂直于$\Delta S$的速度分量。同样

$$\frac{dm}{dt}=\rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}\,dS$$

是质量在V内每单位时间内的改变量。它是由密度为ρ及速度$\boldsymbol{V}$的流体穿过面积元素dS而引起的，其中$\boldsymbol{N}$是指向内的单位法向矢量。沿V的整个表面积分，则得全部质量在流体穿过曲面S的变化率，

$$\frac{dM}{dt}=\iint_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}\,dS.$$

由于在V内沒有沉也沒有洞，我们可把$\frac{dM}{dt}$的两个表达式等同起来：

$$\frac{dM}{dt}=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz=\iint_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}\,dS$$

应用曲面积分的散度定理，并注意它是采用指向外的单位法线矢量，故有

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})\right]dx\,dy\,dz=0.$$

由于V是任意的并假设被积函数連续，于是偏微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0$$

在无沉又无洞的区域里处处成立。这是流体动力学的連续性方程。

设C是三維空间中的一条简单光滑闭曲线。设$\boldsymbol{T}$是C上的单位切线矢量，指向弧长增加的方向（假定弧长是从C上某一固定点量起的，并且设C有确定的方向）。流体沿C的环流定义为：

$$\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{T}\,dS=\int_C v_x dx+v_y dy+v_z dz,$$

这里S是弧长。它等于L乘以沿C的平均切向速度，其中L是C的长。假设流体所占据的区域D是单連通的，并且设沿每一

单闭的光滑曲线的环流等于零*。于是对于D内每一条单闭光滑曲线C，均有

$$\int_C v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz=0.$$

因此，存在一个函数$\phi(x,y,z,t)$，使得$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，$v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}$，$v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$．$\phi$称为速度势。再设流体是不可压缩的，即$\rho$不随时间或空间坐标的变化而改变。则$\partial\rho/\partial t=0$，连续性方程变作$\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，将$\boldsymbol{V}=\nabla\phi$代入，则得

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=0.$$

若设流体是稳定的，即$\boldsymbol{V}$与时间无关，并存在一速度势ϕ，它仅依赖于x，y，z，因此

$$\nabla^2\phi=\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0$$

因此ϕ满足 Laplace 方程。最后，若再设是二維的情形，即速度不依赖于第三个变量z，则存在一个二維速度势$\phi(x,y)$使得$\nabla^2\phi=0$。

在xy平面的某个区域D内，设ϕ是一个复解析函数$f(z)$的实部，则

$$f(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y),$$

且若在D内$f'(z)\neq0$，曲线$\phi=c_1$，$\psi=c_2$是两族互相正交的曲线。曲线$\psi=c_2$的法矢量是$(\partial\psi/\partial x,\ \partial\psi/\partial y)$，并且容易证明这个矢量垂直于该点的速度矢量，即

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\psi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}=0.$$

* 在这情况下，称流体是无旋的。

由于这个原因，即曲线族 $\psi=c_2$ 与流体流动的方向相切，称函数 ψ 为流函数。若流体流经一个刚性的边界，由于流体不能穿进这边界，所以这边界必是流体的流线。因此问题就变为求流函数 ψ，使得在给定的边界上可以用方程 $\psi=c$ 来表示。一旦找到这个流函数，速度便可确定如下：

$$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$x_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

函数 $f(z)$ 称为复速度势。

例 6.1.1. 证明函数 $f(z)=U(z+1/z)$ 代表一个流经半径为1的园柱体的均匀流动，这里 U 是一个正的常量。设 $\phi(x,y)=Re(f(z))$. 则

$$\phi(x,y)=U\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

对于充分大的 x^2+y^2，ϕ 近似于 Ux，从而 $v_x=U$，$v_y=0$。因此，在离原点很远的地方，流体以速度 U 均匀流动，速度的方向指向 x 轴的正向。靠近原点，流动是不均匀的，即流动受到障碍物的干扰。考虑单位园 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，这时

$$f(z)=U(\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta)=2U\cos\theta.$$

因此，单位园是流线 $\psi=0$. 由于流动是与单位园相切，这个园可以看作流体流过的刚性障碍物。图 6.1.2 表示了这种流动的一些流线。

热传导 设三維空间内某个区域 D 为一均匀物体所占据，并设在点 (x,y,z) 处及时刻 t 物体的温度为 $u(x,y,z,t)$. 实验证明，含于体积元素 $\Delta x\Delta y\Delta z$，并且密度为 ρ，温度为 u 的热量是

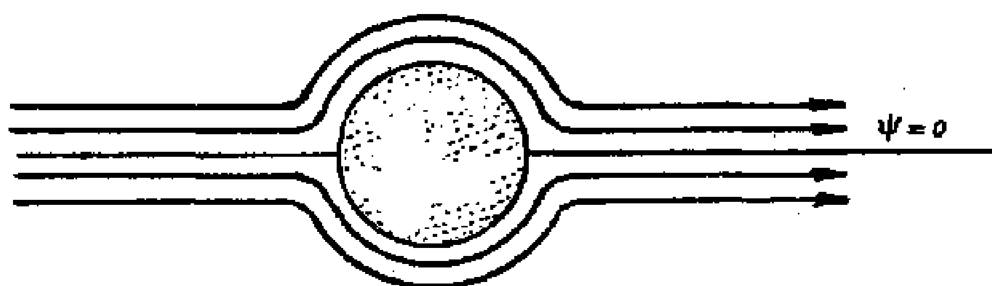


图 6.1.2

$$c\rho u\, dx\, dy\, dz,$$

其中 c 是物质的比热。我们假设这比热是常数，若V是D中的为一光滑曲面所围的固定体积，则含在V中的总热量为

$$H(t)=\iiint_V c\rho u\, dx\, dy\, dz.$$

若设ρ是常量，那末，当温度u随时间变化时，含在V中的热量的变化率为

$$\frac{dH}{dt}=\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\, dy\, dz.$$

实验又表明热量穿过面积元素dS的速率是

$$K\nabla u\cdot\boldsymbol{N}dS,$$

这里K是热传导常数，∇u是面积元素dS上的温度梯度，$\boldsymbol{N}$是曲面的单位法线矢量。若在V中沒有热沉又无冷沉，则在V内热量的总变化是由于热量穿过曲面S而引起的，因此

$$\frac{dH}{dt}=\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\, dy\, dz=-\iint_S k\nabla u\cdot\boldsymbol{N}dS,$$

其中$\boldsymbol{N}$是指向曲面内的法线矢量。利用曲面积分的散度定理，则有

$$\iiint_V\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\nabla^2 u\right]dx\, dy\, dz=0.$$

由于这式对于域D内每一个具有光滑表面的不管多末小的体积V都成立，所以在D中被积函数必然为零。因此温度u必满足

$$\nabla^2 u=\frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

它叫做热传导方程。

若设某一导热物体由于热量穿过它的曲面对热量的获得与散失完全平衡，因而达到一种稳定状态的温度分布，则 u 与 t 无关，从而 $\nabla^2 u=0$. 因此，在稳定状态下温度分布为调和函数。

设在所给物体中，稳定状态的温度分布与第三个变量 z 无关，则可把温度 $u(x,y)$ 表为两个变量的调和函数。设 u 是复变量 z 的解析函数的实部，则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

等温线 $u(x,y)=c_1$ 与梯度 ∇u 垂直，而梯度确定热传导的方向。因为曲线 $v(x,y)=c_2$ 与 ∇u 的方向一致，所以这些曲线是流线，即热量沿着这些曲线传导。

若向物体的边界加上（或移去）热量以維持边界上特定的溫度，则说有了一个边界条件，即在这边界上的溫度是给定的。若以一特定的速率向物体的边界加上或移去热量，这与给定溫度的梯度的法向分量 $\nabla u\cdot \boldsymbol{N}$ 相同，这是另一种可能的边界条件。第三种边界条件是当热量由物体的表面輻射到周圍的介质中时产生的，辐射律确定了

$$\nabla u\cdot \boldsymbol{N}=\alpha(u-u_0),$$

换言之，热量散失的速率正比于物体表面溫度 u 与周围介质溫度 u_0 之差。

例 6.1.2. 试求一半园金属薄板的稳定状态的溫度，其中假定其曲边边界完全绝热，而直边边界的一半維持在 $0°$，而另一半維持在 $100°$，并设半园板的顶面与底面都是完全绝热的，因而热的传导纯粹是二維的，详见图 6.1.3. 显然，我们应求如下的函数：它是某解析函数的实部，而在边界上具有上

述的的边界值。现在，$\arg z$ 在上半平面内从 0 变到 π 且与 $r=|z|$ 无关。若 $u=c\arg z$，则在 $r=a$ 处 $\frac{\partial u}{\partial r}=0$。从而 u 在边界的曲边部分满足边界条件。函数

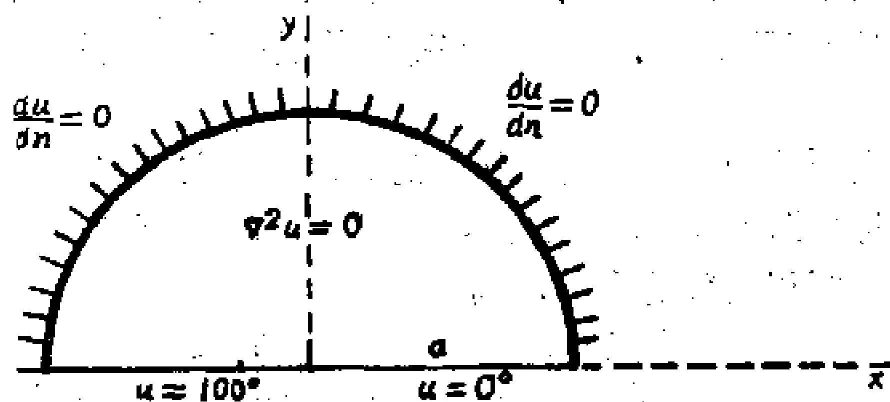


图 6.1.3

$$f(z)=\frac{100}{i\pi}\log z=\frac{100}{\pi}\arg z-\frac{100}{\pi}i\log|z|$$

具有所求的性质。这是因为 $u(x,y)=(100/\pi)\arg z$ 是上半平面内解析函数的实部，如果规定 $-\pi/2\leqslant\arg z\leqslant 3\pi/2$，则它们在正实轴上取值为零，而在负半轴上取值 100。在下一节中我们将证明如果边值问题有解，则解是唯一的。

静电学 实验表明，若在原点处放置一个固定的负电荷 e，则在点 (x,y,z) 处另一电荷 e 将被排斥，排斥力的分量是 $(Ke^2x/r^3,\ Ke^2y/r^3,\ Ke^2z/r^3)$，这里 K 为一常数。由于线积分

$$\int_C \frac{Ke^2}{r^3}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$$

与路径无关，这个力場是保守力場。故存在静电势

$$\phi(x,y,z)=\frac{Ke^2}{r}=\frac{Ke^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

使得 $Ke^2x/r^3=-\partial\phi/\partial x$，$Ke^2y/r^3=-\partial\phi/\partial y$，$Ke^2z/r^3=-\partial\phi/\partial z$。容易证明，除去原点外，$\phi$ 是调和的。

考虑一条无限长的沿着 z 轴放置的导线，其上均匀带电，电荷密度为 ρ。则在点 (x,y,z) 处的电荷 e 受到一个排斥力 $\boldsymbol{F}$，其分量为：

$$F_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xKe\rho d\zeta}{[x^2+y^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xKe\rho dt}{[x^2+y^2+t^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2xKe\rho}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yKe\rho d\zeta}{[x^2+y^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yKe\rho dt}{[x^2+y^2+t^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2yKe\rho}{x^2+y^2},$$

$$F_z=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z-\zeta)Ke\rho d\zeta}{[x^2+y^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{tKe\rho dt}{(x^2+y+t^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

因此，力与 z 无关。而且这二维力場仍然是一保守力場。这是因为线积分

$$\int_C\frac{2Ke\rho}{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)$$

与路径无关，所以存在一个势函数 $\phi(x,y)=-Ke\rho\log r=-2Ke\rho\log\sqrt{x^2+y^2}$。同样也容易证明除原点外，$\phi(x,y)$ 是调和的。

设 S 为一无限长的柱面的曲面，柱体的轴垂直于 xy 平面且与 xy 平面相交成一简单闭曲线 C。假设电荷在曲面上的分布是使得在 S 上的静电位仅是 C 的弧长 s 的函数 $g(s)$，即静

电位与 z 无关。这等价于沿着 z 轴方向有一族带有均匀密度的线电荷。因此在 S 内的电位与 z 无关而满足二維拉普拉斯方程 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$. 在 C 上的边界条件是 $\phi=g(s)$. 这个边值问题即所谓的 Dirichlet 问题，见图 6.1.4.

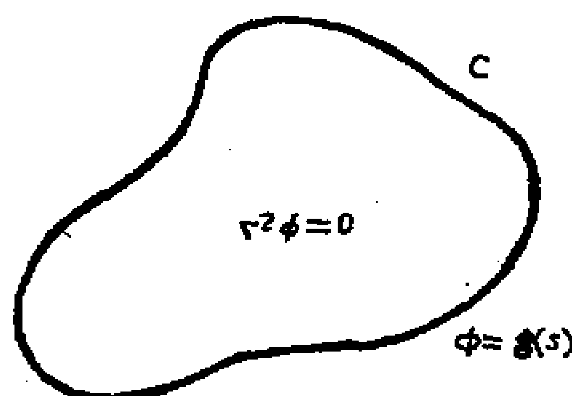


图 6.1.4

例 6.1.3. 平板电容器是由两个无限大的互相平行的金属板组成的，两板之间的距离为 d。在这两金属板上联一电池使得一板的电位为 0 伏；而另一板的电位为 10 伏，问在两板之间的电位分布是什么？这个问题是一个二維问题，即是求一个函数 $\phi(x,y)$，使它在 $0<x<1$, $-\infty<y<+\infty$ 内是调和的，在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $-\infty<y<\infty$ 上是連续的，并且满足边界条件 $\phi(0,y)=0$, $\phi(1,y)=10$. 一个显而易见的解答是线性函数 $\phi=10x$，这函数满足一切条件。注意 $10x=\mathrm{Re}(10z)$，这里 $10z$ 显然在给定的带形域内是一个解析函数。

在物理学中的许多地方都会迂到 Laplace 方程。我们不再一一列举。此外，在研究其他的微分方程，例如热传导方程 $\nabla^2u=a^{-2}\partial u/\partial t$，波动方程 $\nabla^2u=a^{-2}\partial^2u/\partial t^2$，Poisson 方程 $\nabla^2u=f(x,y,z)$ 及方程 $\nabla^2(\nabla^2u)=0$ 等等，Laplace 方程的解都是很重要的。

习　题 6.1

1. 试用下面两种方法导出 $\nabla^2 u$ 在极坐标系中的表达式。

(a) 从 Cauchy－Riemann 方程的极坐标形式中消去 v；

(b) 利用变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

2. 利用极坐标解例 6.1.3.

3. 设电容器是由一无限长的半径为 b 的园柱面和沿其轴放置的无限长的半径为 a 的细导线所组成，现设将电容器充电使柱面的电位达到 10 伏，而使细导线的电位为 0 伏，求此电容器内部的电位。提示：根据对称性，解和 θ 无关。

4. 试求沿一流线的直角障碍物的流动，这里设其初速度 v 平行于它的一个面。提示：用变换 $w=z^2$，把 z 平面的第一象限映射到 w 平面的上半平面上去。

6.2 Dirichlet 问题

我们将考虑位势论中几个边界值问题，这些问题，正如在上一节中所指出的，在物理学中有许多应用。其中最重要的是 Dirichlet 问题。

Dirichlet 问题：设 D 为一有界域，它是由有限个互不相交的单闭曲线 C_i 所围成。设 $u(x,y)$ 在 $D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$ 中連续。并设 u 在 D 中具有連续的二阶偏导数，且滿足 $u_{xx}+u_{yy}=0$；又设在 n 个线路 C_i 上定义了 n 个連续函数 g_i. 问题是要求出这样一个函数 u，使它在 C_i 上取值 g_i.

定理 6.2.1. 若 Dirichlet 问题对于给定的域 D 及一组函数 g_i 有解，则解是唯一的。

证　考虑两个在域 D 的整个边界上取相同的边界值的函数

u_1 和 u_2. 则$W=u_1-u_2$ 在D中解析并在边界上取零值。根据解析函数实部的极大和极小原理，W在域D的边界上取极大值与极小值。这意味着在D内 $W\equiv 0$，因而 $u_1=u_2$.

定理 6.2.2. Dirichlet 问题对于园域 $|z|<R$恒有解。若 $g(\phi)$对于 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 为连续函数，而使 $g(0)=g(2\pi)$，则

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)g(\phi)d\phi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}$$

在 $0\leqslant r<R, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 内是调和的，并且 $u(R,\theta)=\lim\limits_{r\to R}u(r,\theta)=g(\theta)$.

证明 根据定理 3.4.2，习题 3.4.3，以及定理 3.6.1，可得如下的结果：凡在 $|z|<R$内解析且在 $|z|\leqslant R$ 上連续的函数均可由 Cauchy 积分公式表示作：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})Re^{i\phi}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\ d\phi.$$

其中 $|z|=r<R$. 点 $z'=\dfrac{R^2}{r}e^{i\theta}$ 在半径为R的园的外部。所以

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})Re^{i\phi}}{Re^{i\phi}-\dfrac{R^2}{r}e^{i\theta}}d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})re^{i\phi}}{re^{i\phi}-Re^{i\theta}}d\phi.$$

现在 $|Re^{i\phi}-re^{i\theta}|^2=|re^{i\phi}-Re^{i\theta}|^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)$.
故

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})[R^2-Rre^{i(\phi-\theta)}]}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})[r^2-Rre^{i(\phi-\theta)}]}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi.$$

相减，则有

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\phi})(R^2-r^2)d\phi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}.$$

取其实部，得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R,\phi)(R^2-r^2)d\phi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}.$$

这是在半径为R的园域内调和函数的Poisson积分公式，这函数在$|z|\leqslant R$上連续，且在$|z|=R$上取值$u(R,\phi)$。

反之，给定一个連续函数$g(\phi)$，可作积分

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\phi)(R^2-r^2)d\phi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)},$$

可以证明这个函数是Dirichlet问题在园内的解。为要证明它在园内是调和的，只需应用Laplace算子的极坐标形式，在积分号下微分。于是，对于$r<R$,

$$\nabla^2u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\phi)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi.$$

容易证明，在半径为R的园内

$$\nabla^2\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}=0.$$

这里在积分号下微分是允许的，这是因为当$r<R$时，

$$(R^2-r^2)/[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)]$$

具有連续的二阶偏导数。

注意

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi.$$

这是由于函数$f(z)=1$在园域$|z|<R$内是解析的，且在$|z|\leqslant R$上是連续的。因此

$$u(r,\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi,$$

为要证明 $\lim_{r\to R}u(r,\theta)=g(\theta)$，我们必须证明

$$\lim_{r\to R}\int_0^{2\pi}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi=0.$$

由于 $g(\phi)$ 的連续性，对于每一个 $\varepsilon>0$，存在一个 δ 使得对于 $|\phi-\theta|<2\delta$，恒有 $|g(\phi)-g(\theta)|<\varepsilon$. 于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi=\int_0^{\theta-\delta}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

$$+\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

$$+\int_{\theta+\delta}^{2\pi}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

现在

$$|I_2|\leqslant\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi=\varepsilon,$$

又若 $|g(\phi)|\leqslant M$，且 $|R-r|$ 充分小，则

$$|I_1|\leqslant M\int_0^{\theta-\delta}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

$$\leqslant M\int_0^{\theta-\delta}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta}\quad d\phi$$

$$\leqslant 2\pi M\frac{R^2-r^2}{[R-r\cos\delta]^2}\leqslant 2\pi M\frac{R^2-r^2}{R^2(1-\cos\delta)^2}<\varepsilon,$$

同样 $|I_3|<\varepsilon$. 因此

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{[g(\phi)-g(\theta)](R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi\right|\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|<3\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，这就证明了 $\lim\limits_{r\to R}[u(r,\theta)-g(\theta)]=0$.
定理证毕。

推论 6.2.1. 设 $g(\theta)$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上是逐段連续的，则

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\phi)(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

在 $|z|<R$ 内是调和的，并且除了 θ 的有限多个值外，对其它一切 θ 均有 $\lim\limits_{r\to R}u(r,\theta)=g(\theta)$.

证明 用与证明定理 6.2.2. 的同样的方法可证 $u(r,\theta)$ 在半径为 R 的园内是调和的，并且在 $r=R$ 上，对于所有使 $g(\theta)$ 連续的 θ，$u(r,\theta)$ 都取值 $g(\theta)$.

例 6.2.1. 试求在区域

$$B=\{z|\ |z|\leqslant1,\ \mathrm{Im}(z)\geqslant0\}$$

上 Dirichlet 问题的解。其中边界条件为当 $y=0$ 及 $-1<x<1$ 时 $u(x,y)=0$，而当 $x^2+y^2=1$ 时 $u(x,y)=1$. 我们利用这样的事实，即解析函数的解析函数仍是解析的。因此，如果 $u(x,y)=Re(f(z))$，这里 $f(z)$ 是在域 $D=\{z|\ |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 内的解析函数，并设保角映射 $\zeta=g(z)$ 将 D 映射到 ζ 平面上一个半径为 R 的园的内部，并使 D 的边界映射为半径为 R 的园周，再设 $z=h(\zeta)$ 是 g 的反函数（也是解析函数），那么 $U(\xi,\eta)=Re(f(h(\zeta)))$ 在 $|\zeta|<R$ 内是解析的，并且在 $|\zeta|=R$ 上取给定的边界值。利用 Poisson 积分公式可以解出 $U(\xi,\eta)$，然后再用变换 $x=\mathrm{Re}(h(\zeta))$，$y=\mathrm{Im}(h(\zeta))$，就可求出 $u(x,y)$. 我们分三步来求出 $g(z)$. 首先 $\zeta_1=z+1/z$ 把 D 映射为下半平面 $\mathrm{Im}(\zeta_1)<0$，使得 $-1,\ i,\ 1$ 分别映射为 $-2,0,2$. 其次 $\zeta_2=-\zeta_1/2$ 将下半平面 $\mathrm{Im}(\zeta_1)<0$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(\zeta_2)>0$，而使 $-2,0,2$ 分别映射为 $1,0,-1$. 第三，$\zeta=(i-\zeta_2)/(i+\zeta_2)$ 把上半平面 $\mathrm{Im}(\zeta_2)>0$ 映射到单位园 $|\zeta|<1$ 的内部，并使得 -1,

0，1 分别映射为 $-i$，1，i. 把它们合併起来，得

$$\zeta=\frac{2iz+z^2+1}{2iz-z^2-1}$$

其逆映射为

$$z=i\frac{\zeta-1+\sqrt{2(1+\zeta^2)}}{1+\zeta},$$

这里选取平方根的一枝，使得它在单位园 $|\zeta|=1$ 内是解析的。$U(\zeta,\eta)$ 应满足的边界值为：当 $|\arg\zeta|\leqslant\pi/2$ 时 $U=1$，而当 $\pi/2<\arg\zeta<3\pi/2$ 时 $U=0$. 因此

$$U(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\phi-\tau)}d\phi,$$

其中 $\xi=\rho\cos\tau$，$\eta=\rho\sin\tau$. 例如，设 $z=\frac{i}{2}$，则 $\zeta=1/7$，$\rho=1/7$，$\tau=0$，并且

$$u\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2-\left(\frac{2}{7}\right)\cos\phi}d\phi.$$

基于上例的方法，有下面的存在定理：

定理 6.2.3. 设 D 是一单連通区域，其边界为 C. 再设 $\zeta=f(z)$ 在 D 内解析，并一对一地把 $D\cup C$ 映射到 $|\zeta|\leqslant1$ 上，使得 D 映射为 $|\zeta|<1$ 而 C 映射到 $|\zeta|=1$ 上。则

$$U(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)g(\phi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\phi-\tau)}d\phi.$$

是 $D\cup C$ 内 Dirichlet 问题的解，其中 $\xi=\rho\cos\tau$，$\eta=\rho\sin\tau$. 就是説在映射的对应点上，有 $u(x,y)=U(\xi,\eta)$.

(在 6.4 节，我们将证明 Rimann 映射定理。这个定理断言，凡具有多于两个边界点的任何单連通区域都可用一个解析变换一对一地映射为单位园的內部)。

在完成 Dirichlet 问题的研究之前，让我们再用另外一种方

法导出 Poisson 积分公式，这个方法提供了位势论中解决边值问题的一个完全不同的方法。回顾习题 3.1.4. 中的 Green 恒等式：

$$\iint_A (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, dx\, dy = \int_C (u\nabla v\cdot \boldsymbol{N} - v\nabla u\cdot \boldsymbol{N})ds,$$

其中 A 是由单闭曲线(或若干条单闭曲线)所围成的有界区域。单位法矢量 $\boldsymbol{N}$ 指向域 A 的外部，并且，u，v 在 $A\cup C$ 内有連续的二阶偏导数。令 A 为环形域 $\rho\leqslant|z|\leqslant R$，并设 u 在 $|z|<R$ 中调和，并在 $|z|=R$ 上取值 $g(\theta)$，设 v 在 A 的内部为调和函数，且在 $|z|=R$ 上取值为零。则

$$\begin{aligned}0 &= \iint_A (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R} R d\theta - \int_0^{2\pi} u\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=\rho} \rho d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} v\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho} \rho d\theta.\end{aligned}$$

我们要求这样一个函数 v，使得上式右端的第二个积分当 $\rho\to 0$ 时的极限值给出 u 在原点的値，而第三个积分当 $\rho\to 0$ 时趋于零。为此目的，必须 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=\rho}$ 为 $-1/2\pi$ 而 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho v=0$. 具有以上性质并且除原点外处处调和的函数是 $-(1/2\pi)\ln r$. 显然

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln r\right)_{r=\rho} \rho d\theta = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\theta = u(0,0),$$

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} v\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho} \rho d\theta = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\ln\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho} d\theta = 0,$$

这是因为 u 及$\frac{\partial u}{\partial r}$在原点处是连续的。现在，$-(1/2\pi)\ln r$ 除去在 $|z|=R$ 上 $v=0$ 外，满足一切条件。但是，假设我们加上一个函数 $h(x,y)$，这里 $h(x,y)$ 在 $|z|<R$ 内是调和的，并且

$$h(R\cos\theta, R\sin\theta)=(1/2\pi)\ln R.$$

那么，若 $v=-(1/2\pi)\ln r+h(x,y)$，则除去原点外 $\nabla^2 v=0$，并在原点附近具有所需要的性质，而在 $|z|=R$ 上，$v=0$. 其结果为：

$$u(0,0)=-\int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R} R d\theta.$$

最后，显然，如果我们要求在半径为 R 的园内任一点 $z_0=x_0+iy_0$ 处的 u 值，那么，除了用有界域 $|z|=R$ 和 $|z-z_0|=\rho$ 代替 A 以外，可用上述同样的方法进行。利用函数

$$v(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+h(x,y,x_0,y_0)$$

其中 h 是在 $|z|<R$ 中为调和的函数，并且

$$h(R\cos\theta, R\sin\theta, x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|(R\cos\theta-x_0)+i(R\sin\theta-y_0)|.$$

其结果是

$$u(x_0,y_0)=-\int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R} R d\theta.$$

为了帮助我们寻求适当的 $v(x,y,x_0,y_0)$，使得在半径为 R 的园内调和的函数 $u(x,y)$ 在园内任意一点的值能够用其边界值 $g(\theta)$ 表示出来，我们证明如下的引理：

引理 6.2.1. 若动点 z 与两定点 z_0 及 R^2z_0/r_0^2 的距离之比为 r_0/R，则动点的轨迹为园 $|z|=R$.

证明

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{r_0^2}{R^2}\left[\left(x-\frac{R^2x_0}{r_0^2}\right)^2+\left(y-\frac{R^2y_0}{r_0^2}\right)^2\right],$$

$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+r_0^2=\frac{r_0^2}{R^2}(x^2+y^2)-2xx_0-2yy_0+R^2,$$

或

$$(x^2+y^2)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)=R^2-r_0^2,$$

即

$$x^2+y^2=R^2.$$

由这个引理，可看出

$$v(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(x-\frac{R^2x_0}{r_0^2}\right)^2+\left(y-\frac{R^2y_0}{r_0^2}\right)^2}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\ln(r_0/R)$$

当 $r=R$ 时是零。它在园内的点 z_0 处有一个真正的奇点，并且除去点 z_0 外是调和的。若令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, x_0=r_0\cos\phi$, $y_0=r_0\sin\phi$，则

$$v=-\frac{1}{4\pi}\ln[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{r_0^2r^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{2\pi}\frac{r-r_0\cos(\theta-\phi)}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{r_0^2}{R^2}r-r_0\cos(\theta-\phi)}{\frac{r_0^2r^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R}=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\theta-\phi)},$$

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r_0^2)g(\theta)}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\theta-\phi)}d\theta,$$

这就是 Poisson 积分公式。这个推导的重要性在于它是从Green 恒等式出发而沒有应用解析函数的理论。函数 $v(x,y,x_0,y_0)$ 起了特殊的作用。通常称它为Green 函数。这里的主要思想是要把 u 用它在边界上给定的值和 Green 函数 v 表示出来，而 Green 函数 v 可由一组给定的性质导出。这个思想在下一节还要进一步研究。

习 题 6.2

1. 设D是由一条单闭光滑曲线C所围成的单連通区域，设$g(s)$ 是C 上的連续函数，并设$u(x,y)$是$R=D\cup C$ 上的 Dirichlet 问题的解，使得在C上$u=g$. 试叙述下面公式

$$u(x_0,y_0)=-\int_{C+}g(s)\nabla G\cdot N dS$$

中 Green 函数$G(x,y,x_0,y_0)$的性质。

2. 解如下的 Dirichlet 问题：在 $x<0,0<y<\pi$ 内，$\nabla^2u=0$, 而在$x=0$, $0<y<\pi$ 上，$u=1$; 在$y=0$, $y=\pi$, $x<0$ 上，$u=0$. 提示：用变換 $w=e^z$ 将给定的域映射为半园域。

6.3 Green 函数

在这一节中，我们将进一步研究边界值问题中的Green 函数的概念。

设D是由一条单闭光滑线路C围成的有界单連通区域。设$G(x,y,x_0,y_0)$是满足以下性质的一个函数：

1. $G(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H(x,y,x_0,y_0)$,

这里$H(x,y,x_0,y_0)$是在C所围域内调和的函数。

2. 除去D内一点(x_0,y_0)外，G在$D\cup C$内連续。

3. 当(x,y)在C上时，$G(x,y,x_0,y_0)=0$.

如果存在一个函数，滿足这些性质，就称它为关于域$R=D\cup C$的Dirichlet问题的Green函数。

定理 6.3.1. 若Green函数存在，则它是唯一的。

证明 设

$$G_1=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H_1(x,y,x_0,y_0)$$

及

$$G_2=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H_2(x,y,x_0,y_0).$$

则G_1-G_2在D内调和，在R上連续，在C上等于零。因此，根据定理6.2.1，$G_1-G_2=H_1-H_2=0$.

定理 6.3.2. 关于R的Green函数在D内是正的。

证明 设D^*是如下的一个多連通区域：它是由域D的边界C及以z_0为园心，以ρ为半径的小园所围成的区域。现在，G在C上等于零，并且对充分小的ρ，G在小园上是正的。所以，G的极小值（它在边界上取得）为零，并且G在D^*内不得为零。当ρ充分小时，連D中除去z_0外，D中每一点都是D^*的内点，这就完成了证明。

定理 6.3.3. 若G是关于R的Green函数，则对于D内任意一对互异是点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)有$G(x_1,y_1,x_2,y_2)=G(x_2,y_2,x_1,y_1)$.

证明 设ρ_1和ρ_2分别是以(x_1,y_1)和(x_2,y_2)为园心的小园的半径，它们如此之小，使得这两个小园都在D内，而且它们

及其内部都不相交。记 D^* 为 D 的边界 C 与这两个小园所围成的区域，设 $G_1=G_1(x,y,x_1,y_1)$，$G_2=G_2(x,y,x_2,y_2)$，在 D^* 上应用 Green 定理，则有

$$0=\iint_{D*}(G_1\nabla^2G_2-G_2\nabla^2G_1)\,dA$$

$$=\int_{C+}(G_1\nabla G_2\cdot\boldsymbol{N}-G_2\nabla G_1\cdot\boldsymbol{N})\,ds$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(G_2\,\frac{\partial G_1}{\partial r}-G_1\,\frac{\partial G_2}{\partial r}\right)_{r=\rho_1}\rho_1\,d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(G_2\,\frac{\partial G_1}{\partial r}-G_1\,\frac{\partial G_2}{\partial r}\right)_{r=\rho_2}\rho_2\,d\theta$$

但由于在 C 上 $G_1=G_2=0$，故有

$$\lim_{\rho_1\to0}\rho_1\int_0^{2\pi}\left(G_2\frac{\partial G_1}{\partial r}-G_1\,\frac{\partial G_2}{\partial r}\right)_{r=\rho_1}d\theta$$

$$=\lim_{\rho_2\to0}\rho_2\int_0^{2\pi}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial r}-G_2\,\frac{\partial G_1}{\partial r}\right)_{r=\rho_2}d\theta,$$

利用 Green 函数的性质，得到

$$G_2(x_1,y_1)=G_1(x_2,y_2)$$

因此

$$G(x_1,y_1,x_2,y_2)=G(x_2,y_2,x_1,y_1).$$

定理 6.3.4. 若关于域 R 的 Green 函数存在，则对于在 C 上連续的函数 $g(s)$，函数

$$u(x_0,y_0)=-\int_{C+}g(s)\nabla G\cdot\boldsymbol{N}\,ds$$

是对于 R 的 Dirichlet 问题的解，即在 D 内，$\nabla^2u=0$，在 C 上，$u=g$。

我们不准备给出这个定理的证明，它是建立在定理 6.3.1—6.3.3 的基础上的。读者如有兴趣，可参看

R.Courant 与 D. Hilbert，数学物理方法第二卷，纽约，Interscience，Inc.，1962，PP.264—264. 当然，我们将强调，关于区域R的 Dirichlet 问题可以用一个变换将R映射作园域，从而把问题简化为单位园 $|z|\leqslant 1$内的相应问题。这个方法将在下一节中叙述。现在我们只指出一点，即 Green 函数与映射函数之间有如下密切的联系：

定理 6.3.5. 设 $w=f(z)$ 将区域R映射为单位园域 $|z|\leqslant 1$，并使得R的内部D映射为开园 $|z|<1$，而其边界C映射为单位园周 $|z|=1$，设 $f'(z)$ 存在并在D内恒不为零。并设D内一点 z_0映射为原点。则 $G(x,y,x_0,y_0)=-(1/2\pi)\ln|f(z)|$ 是对于区域R的 Green 函数。

证明 首先，由于

$$G=\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi}\log f(z)\right\},$$

所以除 z_0 外G在D内是调和的。在 z_0 附近，

$$\begin{aligned}f(z)&=f(z_0)+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\\&=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\\&=(z-z_0)g(z),\end{aligned}$$

这里 $g(z_0)=f'(z_0)\neq 0$，又

$$-\frac{1}{2\pi}\ln|f(z)|=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|-\frac{1}{2\pi}\ln|g(z)|$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+H(x,y,x_0,y_0),$$

其中H在 z_0 处是调和的。最后，由于有

$$\lim_{z\to C}G=\lim_{z\to C}\left\{-\frac{1}{2\pi}\ln|f(z)|\right\}=-\frac{1}{2\pi}\ln 1=0$$

所以在C上满足边界条件。

在下一节，我们将证明，若D是由一条单闭曲线所围成的

有界单连通域，则存在满足定理6.3.5条件的函数$f(z)$，这表明，关于区域D的Dirichlet问题的Green函数是存在的。

现在，我们转到位势论中其他一些边界值问题的研究。仅次于Dirichlet问题的另一个重要的边界值问题是Neumann问题。设D是由单闭光滑曲线C所围成的有界单连通区域。Neumann问题是在域D上确定一个如下的函数u，它在D内是调和的，在$D\cup C$上具有连续的一阶偏导数，并使得在C上$\nabla u\cdot \boldsymbol{N}=g$，这里$g$是定义在$C$上的给定的函数。显然，Neumann问题的解假如存在的话，不是唯一的。因为如果u是它的一个解，则在u上加上任意常数仍然满足所述的条件。然而，如果我们另外规定u在C上的平均值为零，则可使解是唯一的。

定理 6.3.6. 使得$\int_{C+}u\,ds=0$的Neumann问题的解如果存在，则是唯一的。

证明 设u_1和u_2均在D内调和，并且在C上具有相同的法向导数。那么$v=u_1-u_2$在D内是调和的，在C上的法向导数等于零。于是

$$\iint_D \nabla v\cdot\nabla v\,dA=-\iint_D v\nabla^2 v\,dA+\int_{C+}v\nabla v\cdot\boldsymbol{N}\,ds=0.$$

故在D内$\nabla v=0$，从而$v=u_1-u_2=k$为一常数，但

$$0=\int_{C+}(u_1-u_2)\,ds=\int_{C+}k\,ds=k\cdot L,$$

而$L\neq 0$，因此$k=0$，即$u_1\equiv u_2$.

定理 6.3.7. Neumann问题有解的必要条件是

$$\int_{C_1}g(s)\,ds=0.$$

证明 设存在函数u，使在D内有$\nabla^2 u=0$，而在$D\cup C$

上u的一阶偏导数连续，且在C上$\nabla u\cdot\boldsymbol{N}=g(s)$，那么，设$v\equiv1$，则有

$$0=\iint_D(v\nabla^2u-u\nabla^2v)\,dA=\int_{C+}(v\nabla u\cdot\boldsymbol{N}-u\nabla v\cdot\boldsymbol{N})\,ds$$

$$=\int_{C+}\nabla u\cdot\boldsymbol{N}\,ds=\int_{C+}g(s)\,ds.$$

其次，如果我们可以关于Neumann问题定义其Green函数，与Dirichlet问题相似的讨论，可设除去在(x_0,y_0)外，$G(x,y,x_0,y_0)$在D内其他处是调和的，而在(x_0,y_0)处，函数有一个形如$-(1/2\pi)\ln|z-z_0|$的奇点。所以

$$G(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H(x,y,x_0,y_0),$$

其中H在D内是调和的。与Dirichlet问题相似，我们也希望在C上有$\nabla G\cdot\boldsymbol{N}=0$，但这是不可能的，这是由于

$$\int_{C+}\nabla H\cdot\boldsymbol{N}\,ds=0\text{ 及 }\frac{1}{2\pi}\int_{C+}\nabla\ln|z-z_0|\cdot\boldsymbol{N}\,ds=1$$

因此

$$\int_{C+}\nabla G\cdot\boldsymbol{N}\,ds=-1.$$

但我们可在C上取$\nabla G\cdot\boldsymbol{N}$为一常数$-1/L$，其中$L$为$C$的长度。这个条件仍然不足以使$G$为唯一的，为了这个原因我们规定$G$在$C$上的平均值为零，即

$$\int_{C+}G\,ds=0.$$

定理 6.3.8. 设D是由一单闭光滑曲线所围成之有界连通域。设Green函数G定义如下：

1. $G(x,y,x_0,y_0)=-\dfrac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H(x,y,x_0,y_0)$.

2. H在D中是调和的。

3. G及其一阶偏导数在$D\cup C$上连续。

4. 当(x,y)在C上时$\nabla G\cdot \boldsymbol{N}=-1/L$.

5. $\int_{C+}G\,ds=0$.

若G存在，则必是唯一的。

证明 设

$$G_1=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H_1\text{及}G_2=-\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|+H_2,$$

则H_1-H_2在D内是调和的，并在C上具有零法向导数，且

$$\int_{C+}(G_1-G_2)\,ds=\int_{C+}(H_1-H_2)\,ds=0.$$

则由定理 6.3.6， $H_1-H_2\equiv 0$，从而$H_1\equiv H_2$.

定理 6.3.9. 设u是关于域D的 Neumann 问题的解，且满足定理 6.3.6 及定理 6.3.7 的条件，并设G为满足定理 6.3.8 的条件的 Green 函数，则

$$u(x_0,y_0)=\int_{C+}g(s)G\,ds.$$

证明 设D^*为由域D的边界C及以z_0为园心，ρ为半径的小园所围的域，在D^*上对u和G应用 Green 定理，则有

$$\begin{aligned}0&=\iint\limits_{D^*}(u\nabla^2G-G\nabla^2u)\,dA\\&=\int_{C+}(u\nabla G\cdot\boldsymbol{N}-G\nabla u\cdot\boldsymbol{N})\,ds\\&\quad+\int_0^{2\pi}\left(G\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho}\rho\,d\theta-\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=\rho}\rho\,d\theta.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\left(G\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho}\rho\,d\theta=0,$$

故有

$$u(x_0,y_0)=\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=\rho}d\theta=\int_{C+}gGds+\frac{1}{L}\int_{C-}uds$$

$$=\int_{C+}gGds,$$

这是因为$\int_{C+}uds=0$.

证明Neumann问题的解的存在的一个方法是首先证明Green函数的存在，然后证明若$g(s)$在c上连续，且$\int_{C+}g(s)ds=0$，则

$$u(x_0,y_0)=\int_{C+}g(s)Gds$$

是 Neumann 问题的解。我们现在只就一个特殊情形，即D是园域$|z|<R$，而C是园周$|z|=R$的情况来证明此事。

不难证明园域$|z|<R$的 Green 函数是：

$$G(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln r_1-\frac{1}{2\pi}\ln r_2+\frac{1}{2\pi}\ln R/\rho,$$

其中$r_1=|z-z_0|$，$r_2=|z-(R^2/\rho^2)z_0|$，且$\rho=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，我们留给读者作为练习。在极坐标系下，$z=re^{i\theta}$，$z_0=\rho e^{i\phi}$且

$$G(r,\theta,\rho,\phi)=-\frac{1}{4\pi}\ln[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{R^4}{\rho^2}+r^2-2r\frac{R^2}{\rho}\cos(\theta-\phi)\right]+\frac{1}{2\pi}\ln R/\rho.$$

设$g(\theta)$在$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$上连续，$g(0)=g(2\pi)$，且

$$\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta=0.$$

则

$$u(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}g(\theta)G(R,\theta,\rho,\phi)Rd\theta$$

是对于园域的 Neumann 问题的解，其边界条件是

$(\partial u/\partial\rho)_{\rho=R}=g(\theta)$，以及$\int_0^{2\pi}u(R,\phi)d\phi=0$. 显然，对于$\rho<R$,

我们可在积分号下取 Laplace 算子 ∇^2. 因为对于 $\rho<R$, $\nabla^2 G=0$, 故

$$\nabla^2 u=\int_0^{2\pi} g(\theta)\nabla^2 GRd\theta=0.$$

对于 $\rho<R$,

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=R\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{\partial G}{\partial\rho}d\theta$$

$$=\frac{R}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta$$

$$-\frac{R}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{R}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta.$$

利用在定理 6.2.2. 中相似的计算方法，并利用 $g(\theta)$ 的連续性，有

$$\lim_{\rho\to R}\frac{\partial u}{\partial\rho}=g(\phi).$$

又

$$\lim_{\rho\to R}u(\rho,\phi)=-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\ln 2R^2[1-\cos(\theta-\phi]d\theta,$$

不难证明这个积分存在。最后，对半径为 R 的园和园心在 (x_0,y_0) 的小园之间的区域应用 Green 定理，并当小园的半径趋于零时，用通常的极限推理，可以证明

$$u(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}g(\theta)G(R,\theta,\rho,\phi)Rd\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\phi)d\phi.$$

因此

$$\int_0^{2\pi}u(R,\phi)d\phi=0.$$

假设D是由一单闭光滑曲线C所围成的有界单连通域。设$w=f(z)$将$D\cup C$映射到闭园域$|w|\leqslant R$上，并且在$D\cup C$上$f'(z)\neq 0$．在这映射下，Laplace方程保持不变。若一函数在C上的法向导数已经给定，则它被映射为：

$$g=\nabla u\cdot \boldsymbol{N}=\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial_y}n_y$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\ \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\ \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\cos(\alpha^*-\beta),$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\ \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\ \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\sin(\alpha^*-\beta),$$

这里$f(z)=\xi+i\eta$，$\alpha^*=\arg \boldsymbol{N}^*$，以及$\beta=\arg f'(z)$．
又$f'(z)=\xi_x+i\eta_x=\eta_y-i\xi_y=|f'(z)|\ (\cos\beta+i\ \sin\beta)$．
因此

$$g=\frac{1}{|f'(z)|}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\cos\alpha^*+\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\cos\alpha^*\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\sin\alpha^*+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\sin\alpha^*\right]$$

$$=|f'(z)|\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cos\alpha^*+\frac{\partial u}{\partial \eta}\sin\alpha^*\right),$$

这里$u_\xi\cos\alpha^*+u_\eta\sin\alpha^*$是$u$在$C^*$上的法向导数，其中$C^*$是$C$在映射$w=f(z)$下的象。此外

$$0=\int_{C^+}g\ (s)ds=\int g^*(s^*)\ |f'(z)|\ ds=\int g^*(s^*)ds^*.$$

因此，关于域D的Neumann问题就变成关于园域$D^*=\{w|\ |w|\leqslant R\}$的Neumann问题。所以保角变换是解决边界值问题的一种技巧，将在下一节研究这个问题。

Green函数的方法还可以应用于位势论中的其他类型的边

界值问题，例如，可给出一个调和函数在域 D 的边界上 $\nabla u\cdot N+ku$ 的值，或者在边界的一部分上给出调和函数的值，而在边界的另一部分上给出它的法向导数的值。读者可以自己叙述这些边界值问题，并给出相应的Green函数所满足的条件，从而使得这些边界值问题的解可以用相应的Green函数表示出来。

习　题 6.3

1．关于上半平面的Dirichlet问题可叙述如下：$u(x,y)$ 在开的上半平面内为调和，在闭的上半平面上連续，$u(x,0)=g(x)$，并且当 r 充分大时 u 具有以下的性态：

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}R\,d\theta=0,$$

证明若解存在，则必是唯一的。

2．承习题1，证明

$$G(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$$

是关于上半平面问题的Green函数，即如果解存在，则解可表作

$$u(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,G_y(x,0,x_0,y_0)\,dx$$

$$=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{(x-x_0)^2+y_0{}^2}\,dx.$$

6.4　保角映射

我们在上一节中已经指出用解析函数所作的映射对于解决

位势中的问题是怎样地有用(参看例 2.4.7，6.1.2，6.1.3 及 6.2.1.)然而为了假设在映射 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$下，Laplace 方程在z_0处保持不变，还需要一个条件，即$f'(z_0)\neq 0$，这是因为

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{z_0}=\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right)_{w_0}|f'(z_0)|,$$

这里 $\Phi(u,v)$ 是 $\phi(x,y)$ 的映象，且$w_0=f(z_0)$.（参看 2.4 节）。

回忆 2.4 节，若 $w=f(z)$具有如下的性质，即在z_0处保持角的大小和方向不变，则称它是保角的。在 2.4 节中已经证明，如果 $f(z)$在 z_0 处解析且 $f'(z_0)\neq 0$，则映射在 z_0 处是保角的。而且(参看定理 4.4.6) 若 $w=f(z)$在点 z_0处解析，并且，$f'(z_0)\neq 0$，那么至少在局部范围内是可逆的，其逆映射在 w_0 处也是保角的，也就是说，存在 z_0 的一个 ε- 邻域，在此邻域内映射是一对一的，反函数是解析的，并且其导数不为零。但是，为了求解边值问题，局部的可逆性通常是不够的。甚至$f(z)$在区域D内解析且$f'(z)\neq 0$也不足以保证在整个区域D内变换具有唯一的逆变换。例如在 $D=\{z|\ 0<|z|<1\}$中考虑函数$w=z^2$，则在D中$f'(z)=2z$不为零。但是却不存在单一的逆映射，这是因为这个函数把D映射到$D'=\{w|\ 0<|w|<1\}$上两次。

为了这个目的，最感兴趣的是如下一类函数：

定义 6.4.1. 函数$w=f(z)$在区域D内称为单叶函数，是指它在D内解析，并且是一对一的，即对D内两点z_1，z_2，且$z_1\neq z_2$，则$f(z_1)\neq f(z_2)$.

定理 6.4.1. 若$f(z)$在域D内是单叶的，则在D内$f'(z)\neq 0$.

证明 设在D内某点z_0处有$f'(z_0)=0$，则$f(z)-f(z_0)$在z_0处有$n\geqslant 2$阶的零点。由于$f(z)$不是常数，故存在一个

圆 $|z-z_0|=\rho$，在这个圆上 $f(z)-f(z_0)$ 不为零，并且在这圆内 $f'(z)$ 只在 z_0 处等于零。记

$$m=\min_{|z-z_0|=\rho}|f(z)-f(z_0)|.$$

若 $0<|c|<m$. 则根据 Rouché 定理，$f(z)-f(z_0)-c$ 在圆内有 n 个零点。但是由于在 z_0 处有 $f'(z)=0$，$f(z)-f(z_0)-c$ 在这个圆内不能有重零点，这说明存在两点或更多的点处 $f(z)=f(z_0)+c$。这与函数的一对一的单叶特性相矛盾。

推论 6.4.1. 若 $f(z)$ 在域 D 中是单叶的，则它在 D 内是保角的。

可以看出，单叶函数具备上述映射的一切所希望的性质。它们保持角的大小与方向不变；保持 Laplace 方程不变；它们具有唯一的逆映射，而这逆映射在一切点处与局部逆变换相同，并且逆映射仍是一个单叶函数，同时，还存在如下的复合单叶函数的性质：

定理 6.4.2. 若 $f(z)$ 是域 D 内的单叶函数，并且具有值域 D'，又设 $f(w)$ 在 D' 内是单叶的，则 $F(f(z))$ 在 D 内是单叶的。

证明 $F(f(z))$ 的解析性是显然的，设 z_1 与 z_2 是 D 中的点，若 $F[f(z_1)]=F(f(z_2)]$，则 $f(z_1)=f(z_2)$，这是由于 F 是单叶的原故。但由于 f 是单叶的，所以若 $f(z_1)=f(z_2)$ 则有 $z_1=z_2$.

下面两个定理给出函数在域 D 内为单叶的充分条件：

定理 6.4.3. 设 C 为一单闭曲线，其内部为 D，设 $f(z)$ 在 C 上及 C 所围域内解析，并且在 C 上任意两点取值不同，则 $f(z)$ 在 D 内是单叶的。

证明 设函数 $w=f(z)$ 将 C 映射为 w 平面的一条单闭曲线 C'. 设 w_0 是 w 平面上不在 C' 上的任意一点，则

$$n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{dw}{w-w_0}.$$

如果 w_0 在 C' 之外，最后一个积分是零，如果 w_0 在 C' 之内，则积分之值为 ± 1，这取决于 C 的正方向对应于 C' 的正方向或负方向。但是 n 不能是负数，这是因为第一个积分等于 $f(z)-w_0$ 在 C 所围域内零点的个数。因此，如果 w_0 在 C' 内，则 $n=1$. 这就证明了当 w_0 在 C' 内时，$f(z)=w_0$ 只有一个解，即 $f(z)$ 在 D 内是单叶的，并且将 D 单叶地映射为 D'，这里 D' 是 C' 的内部，并且 C' 的正向对应于 C 的正向。

定理 6.4.4. 设 $f_n(z)$ 在域 D 内是单叶的，$n=1, 2, 3, \cdots$，又设 $f_n(z)$ 在 D 内正规收敛于 $f(z)$，即在 D 的每一个紧緻子集上一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 C 内或者是常量，或者是单叶的。

证明 由定理 4.2.3, 可知 $f(z)$ 在域 D 内解析。假设 $f(z)$ 不是常数，并设 z_1 和 z_2 是 D 内任意两个互异的点，若 $w_0=f(z_1)=f(z_2)$，则在 D 内存在两个不相交的园域 $|z-z_1|\leqslant\rho_1$ 及 $|z-z_2|\leqslant\rho_2$. 在它们的边界上 $f(z)-w_0$ 不为零。设 m 为 $|f(z)-w_0|$ 在这两个园域的边界上的最小值，并设 n 如此之大，使得 $|f(z)-f_n(z)|<m$ 在这两个园域上成立。根据 Rouché 定理，在园域的内部

$$f_n(z)-w_0=f(z)-w_0+f_n(z)-f(z)$$

与 $f(z)-w_0$ 具有相同个数的零点，即有两个零点。这表示 $f_n(z)$ 在 D 内不是单叶的，这是因为它至少两次取得值 w_0。因此 $f(z)$ 或者是单叶的，或者为常数。至于 $f(z)$ 可以是常数，可由下例看出：即 $f_n(z)=z/n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=0$.

正如我们在 6.2 节，6.3 节中所指出的，在保角变换的理论中一个中心问题是寻求一个单叶函数 $w=f(z)$，它把一

个给定的单連通区域映射为单位园域 $|w|<1$. 我们将证明(Riemann映射定理)：在相当广泛的假设下，这样的映射是存在的。作为这个定理的予备知识，我们需要下述定理：

定理 6.4.5. 设 $w=f(z)$ 在单位园域 $|z|\leqslant 1$ 上是单叶的，它把这个园域映射为单园位域 $|w|\leqslant 1$，并且使原点映射为原点，并把在原点处的一个给定的方向保持不变，则 $f(z)$ 恒等于映射 $w=z$

证明 当 $|z|=1$ 时，我们有 $|f(z)|=1$，以及 $f(0)=0$，由 Schwarz 引理 $|w|=|f(z)|\leqslant|z|$. 应用同一推理于逆映射，则又有 $|z|\leqslant|w|$. 因此 $|f(z)|=|z|$ 或 $f(z)=e^{i\alpha}z$. 于是 $\arg w=\arg z+\alpha$. 因为在原点处给定的方向保持不变，所以 $\alpha=0$. 因此 $w=f(z)=z$.

定理 6.4.6. 设 $w=f(z)$ 在单位园域 $|z|\leqslant 1$ 内是单叶的，它将这园域映射为单位园域 $|w|\leqslant 1$，则 $f(z)$ 是一个线性分式变换（参阅2.4节）。

证明 在习题2.4.2中，已知

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{\bar{\beta}z-1}$$

是把单位园域映射为单位园域的一个单叶映射，并把 $z=0$ 映射为 $\beta e^{i\alpha}$，$|\beta|<1$. 因此，逆变换把 $\beta e^{i\alpha}$ 映射为原点。现在，$w=f(z)$ 将单位园域映射为单位园域，并且 $w_0=f(0)=\beta e^{i\alpha}$. 又

$$\frac{w-\beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta}w-e^{i\alpha}}$$

把 w_0 映射为原点。因此

$$\frac{f(z)-\beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta}f(z)-e^{i\alpha}}$$

把原点映射为原点。由前述定理

$$\frac{f(z)-\beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta} f(z)-e^{i\alpha}}=e^{i\gamma} z.$$

因此

$$w=f(z)=e^{i\alpha} \frac{e^{i\gamma} z-\beta}{\bar{\beta} e^{i\gamma} z-1}$$

这是一个线性分式变换。❶

Riemann映射定理讨论了把一个单連通区域D映射为另一个单連通区域D'的单叶映射问题。实际上，这只要证明一个给定的单連通区域能够单叶地映射为单位园域$|w|<1$即可。这是因为如果D'是在ζ平面上，并且存在一个单叶映射$w=g(\zeta)$将D'单叶地映射为单位园域。以及映射$w=f(z)$将D单叶地映射为单位园域，那么

$$\zeta=g^{-1}[f(z)]$$

就是把D映射为D'的单叶映射。因此，在实际证明中，我们将取D'为单位园域$|w|<1$.

显然，除去D的单連通性外，还必须对D的边界加以一些限制。例如，假设D只有一个单一的边界点z_0。可设$z_0=\infty$. 这是因为利用变换$\zeta=1/(z-z_0)$便可做到这一点。因此，如果定理对于在无穷远点有一个单一的边界点的域D为真，那么$w=f(z)$在非延拓的平面上对于一切z都是解析的，并且

---

❶ 这个定理的证明中似应这样修改：

$\frac{w-\beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta} w-e^{i\alpha}}=\zeta$ 把 w_0映射为 $\zeta=0$。因此

$\frac{f(z)-\beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta} f(z)-e^{i\alpha}}=\eta$ 把原点映射为原点，故由上述定理有

$\eta=e^{i\gamma} z$，……。"

——译者注

$|w|=|f(z)|<1$. 但是，根据Liouville定理，$f(z)$是常数，从而不是单叶的。事实上我们将证明，若D是一个单連通域并且至少有两个边界点，则有如下定理：

定理 6.4.7. Riemann 映射定理 设D是一个至少具有两个边界点的单連通区域。那么存在一个单叶函数$w=f(z)$，它将D映射为单位园域$|w|<1$.如果我们再规定将D内一点z_0映射为原点，并且把z_0处的给定的方向映射为原点处的给定的方向，这种映射是唯一的。

证明 在证明中，我们将要用到在4.2节中关于解析函数的正规族(normal family)的理论。事实上，我们将作出一个函数的紧緻族，并把所寻求的映射函数作为这个族中的某个参数序列的极限。

设G是如下的一切函数$g(z)$所组成的族，在这函数族中的函数$g(z)$在D内是单叶的，并且对于D内的一切z有$|g(z)|\leqslant 1$. 首先必须证明G是非空的。设a、b是D的边界点，作函数

$$h(z)=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

它可以这样来做。从D内的平方根的一个给定的分支的某个解析元素出发，然后把它析解延拓到整个D上。根据单值性定理及D为单連通域这个事实，便知这个方法必定义D内的一个单值的解析函数。现在，$h(z)$是单叶的，因为如果假设$h(z_1)=h(z_2)$，则$[h(z_1)]^2=[h(z_2)]^2$，从而

$$\frac{z_1-a}{z_1-b}=\frac{z_2-a}{z_2-b},$$

这表示$z_1=z_2$。设D^*是D在映射$h(z)$之下的映象。若β在D^*内，则$-\beta$不在D^*内。因为如果不然，则

$$\beta=\sqrt{\frac{z_1-a}{z_1-b}}, \qquad -\beta=\sqrt{\frac{z_2-a}{z_2-b}},$$

从而

$$\beta^2=\frac{z_1-a}{z_1-b}=\frac{z_2-a}{z_2-a}$$

这就得到 $z_1=z_2$. 设 w_0 为D^*内的点，由于D^*是一个域，它包含一个 ε–邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$. 又由于w_0和 $-w_0$两点不能同时在D^*内，所以$-\omega_0$的 ε–邻域 $|w+w_0|<\varepsilon$不在D^*内。因此，对于D内所有的 z，有 $|h(z)+w_0|\geqslant\varepsilon$. 现在，函数

$$g_1(z)=\frac{\varepsilon}{h(z)+w_0}$$

在D内是单叶的，并且对于D内的一切 z，有 $|g_1(z)|\leqslant 1$，所以 g_1 属于族G，这就证明了G是非空的。

现在，G是一致有界的函数族，因此是解析函数的正规族。但是，由于它包含有不是单叶函数的常数函数，而常数函数却可以是单叶函数序列的极限函数，所以，G不是紧緻的。设 G' 是G中这样函数所组成的子族；即 $|g'(z_0)|\geqslant|g_1'(z_0)|$，$z_0$ 是D 的一点。G' 显然是非空的，因为 $g_1(z)\in G'$. 同时，由于G'中不包含常数函数（这是因为常数函数的导数等于零，而 $g_1(z)$ 是单叶函数，$|g_1'(z_0)|>0$），所以 G' 是紧緻的。

现在我们要证：$|g'(z_0)|$ 在G'内达到一个极大值M，即在 G' 内存在函数 $f(z)$，使得对于 G' 内所有其他的函数 $g(z)$，有 $|f'(z_0)|=M\geqslant|g'(z_0)|$. 这可证明如下：设$F[g]=|g'(z_0)|$（$F$称为 g 的一个泛函），则在如下的意义下F是連续的：若$\{g_n(z)\}$是G'内的具有极限$g(z)$的一个函数序列，则$\lim\limits_{n\to\infty}F[g_n]=F[g]$。对于$G'$内的所有的$g$，正实数$F[g]$的全体

是一个具有上确界M的实数集（M可以为∞）。因此，存在一个序列$[g_n(z)]$，使得$\lim F[g_n]=M$. 但是由于G'是正规的和紧緻的，因此$\{g_n(z)\}$含有一个子序列$\{g_{n_k}(z)\}$，此子序列在G'内具有极限$f(z)$，从而

$$F[f]=\lim_{n_k\to\infty}F[g_{n_k}]=M.$$

但是$F(f)$必为有限值，因此M是有限的。并且对于G'内所有的g，有$M\geqslant F[g]$成立。

最后，我们证明$w=f(z)$将D映射为园域$|w|<1$. 首先，我们证明$f(z_0)=0$. 因为$|f(z)|$在D的内部不能取得极大值，所以$|f(z_0)|<1$，设

$$f_1(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{\overline{f(z_0)}f(z)-1},$$

$f_1(z)$也属于G'，然而

$$|f_1'(z_0)|=\frac{|f'(z_0)|}{1-|f(z_0)|^2}\geqslant|f'(z_0)|,$$

这表示除非$f(z_0)=0$，否则$|f_1'(z_0)|>M$. 假设ω是$f(z)$在D内所取不到的一个值，其中$|\omega|<1$，则

$$p(z)=\sqrt{\frac{\omega-f(z)}{1-\overline{\omega}f(z)}}$$

在D内是单叶的，这是因为，如果对D内的z_1和z_2有$p(z_1)=p(z_2)$，则

$$\frac{\omega-f(z_1)}{1-\overline{\omega}f(z_1)}=\frac{\omega-f(z_2)}{1-\overline{\omega}f(z_2)}.$$

由于$f(z)$在D内是单叶的，这就表示$f(z_1)=f(z_2)$，以及$z_1=z_2$，从而在D内有$|p(z)|^2=|\omega-f(z)|/|1-\overline{\omega}f(z)|\leqslant1$. 因此，$p(z)$属于$G$. 又

$$g(z)=\frac{p(z)-p(z_0)}{1-\overline{p(z_0)}p(z)}$$

也属于G．但是

$$g'(z_0)=-\frac{1+|\omega|}{2\sqrt{\omega}}f'(z_0);$$

这表示$|g'(z_0)|>|f'(z_0)|$，这是因为

$$1+|\omega|=2\sqrt{|\omega|}+(1-\sqrt{|\omega|})^2>2\sqrt{|\omega|},$$

但这与$f'(z_0)=M\geqslant|g'(z_0)|$矛盾，这就证明了$w=f(z)$取$D'$内所有的值。

唯一性证明如下：设$f_1(z)$和$f_2(z)$把D映射为园域$|w|<1$，并把z_0映射为原点，且将z_0处的一个给定的方向映射为原点处的同一方向。于是$f_1[f_2^{-1}]$将园域映射为园域，把原点映射成原点，并保持原点处的一个方向不变。根据定理6.4.5，$f_1[f_2^{-1}]$是恒等映射。因此$f_1=f_2$。这就完成了定理6.4.7的证明。

为了我们的目的，Riemann映射定理就如下两点来说是不够有效的。第一，它纯粹是一个存在定理，它只肯定了映射函数的存在，但沒有告诉我们如何作出这个映射。然而，已经有了一些方法可以作出这个映射*。下一节将要研究的Schwarz—Christoffel方法也给出一个在一定条件下寻求映射函数的一般方法。这个方法将用直线段围成的角状域映射为半平面，而后者又可映射为单位园域。第二，Riemann映射定理对于域的边界沒有足够的讨论。例如，如果$w=f(z)$将D保角地映射为D^*，那么D的边界点与D^*的边界点是怎样互相对应？我们叙述而不证明如下的定理：

定理 6.4.8. 设D和D^*是由单闭曲线C和C^*所围成的区域，那么将D映射为D^*的保角映射在$D\cup C$上是連续的，并且在C和C^*之间建立起一一对应的关系。

---

* 参看Wilf, H. S. Mathematics for the physical Sciences, New York. John Wiley and Sons, Inc. 1962. pp. 202－203.

这个定理的证明可以参考 Nehari ，Z. 所著"*Conformal Mapping*" New york: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952， PP. 179－181.)

习 题 6.4

1. 假设 $\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \leqslant 1$，证明

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

关于 $|z|<1$ 是单叶的。

2. 设 $f(z)$ 在单闭曲线 C 上及其内部是单叶的，C 的内部为 D，并设 D 被 $f(z)$ 映射为 D^*，C 被映射为 C^*，这里 C^* 是 D^* 的边界。

(a) 证明 C^* 的长度是 $\int_C |f'(z)|\,|dz|$；

(b) 证明 D^* 的面积是 $\iint_D |f'(z)|^2\,dx\,dy$；

(c) 若 C 为圆心在原点，半径为 R 的圆周，证明 D^* 的面积 $\geqslant \pi|f'(0)|^2R^2$。

3. 证明 $w=3z+z^2$ 在圆域 $|z|<1$ 内是单叶的。

6.5 Schwarz-Christoffel 变换

Riemann 映射定理是一个存在定理，它告诉我们在十分广泛的条件之下，存在一个单叶函数，把给定的单連通域映射为另一个单連通域，或者换一种说法，映射成单位圆域。但是，它沒有告诉我们怎样去寻求所求的映射。在这一节内，我们将考虑如何寻求特殊的映射的问题。这在解决位势论的边界值问题中有很多应用。我们将考虑一些例子，并由此引出 Schwarz—Christoffel 变换。这个变换可以把由直线或直线段

所围成的区域映射为上半平面，而上半平面又可以映射为单位园域。

例 6.5.1. 试求一个单叶映射，它把扇形域 $0\leqslant\arg z\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，$|z|\geqslant 0$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(w)\geqslant 0$，并使原点映射为原点。显然，$w=z^{\pi/\alpha}$ 就是所求的变换。因为 $\arg w=(\pi/\alpha)\arg z$，并且 $|w|=|z|^{\pi/\alpha}$。

例 6.5.2. 试求一单叶映射，它把扇形域，$0\leqslant\arg(z-z_0)\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，$|z-z_0|\geqslant 0$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(w)\geqslant 0$，并使 z_0 映射为 w_1（实数）。显然，$w=w_1+(z-z_0)^{\pi/\alpha}$ 就是所求的单叶映射，这是因为 $\arg(w-w_1)=(\pi/\alpha)\arg(z-z_0)$ 且 $|w-w_0|=|z-z_0|^{\pi/\alpha}$。

例 6.5.3. 试求一单叶映射，它把扇形域 $\beta\leqslant\arg(z-z_0)\leqslant\alpha+\beta\leqslant 2\pi+\beta$，$|z-z_0|\geqslant 0$ 映射为上半平面，$\mathrm{Im}(w)\geqslant 0$，并设 z_0 映射为 w_1（实数）。此问题可以用以下步骤解决。先作平移 $\zeta_1=z-z_0$，然后旋转 $\zeta_2=e^{-i\beta}\zeta_1=e^{i\beta}(z-z_0)$，最后应用例 6.5.2 的结果，即

$$w=w_1+e^{-\frac{i\beta\pi}{\alpha}}(z-z_0)^{\pi/\alpha}.$$

在例 6.5.3 中，我们已经能够把任意位置的扇形域映射为上半平面，并把扇形域的顶点映射为实轴上的任何给定的点。注意，其逆变换由下式给出

$$z=z_0+e^{i\beta}(w-w_1)^{\alpha/\pi}$$

并且

$$\frac{dz}{dw}=\frac{\alpha}{\pi}e^{i\beta}(w-w_1)^{(\alpha/\pi-1)}.$$

设 w 是实轴上的一点，并将这个点向右移动了一个距离 $dw>0$，并设 $\arg dw=0$，于是在这微小的改变中

$$\arg dz=\beta+[(\alpha/\pi)-1]\arg(w-w_1).$$

现在当w在w_1的左边时，$\arg(w-w_1)=\pi$，从而$\arg dz=\beta+\alpha-\pi$。这表明在这个位移中，z以这样的形式变换：它沿着一条直线移动，这直线与x轴的交角为$\alpha+\beta-\pi$。这一直保持到w到达w_1时为止。于是$\arg dz=\beta$。这表示当w经过w_1时，z突然改变一个方向$\pi-\alpha$。参看图 6.5.1。

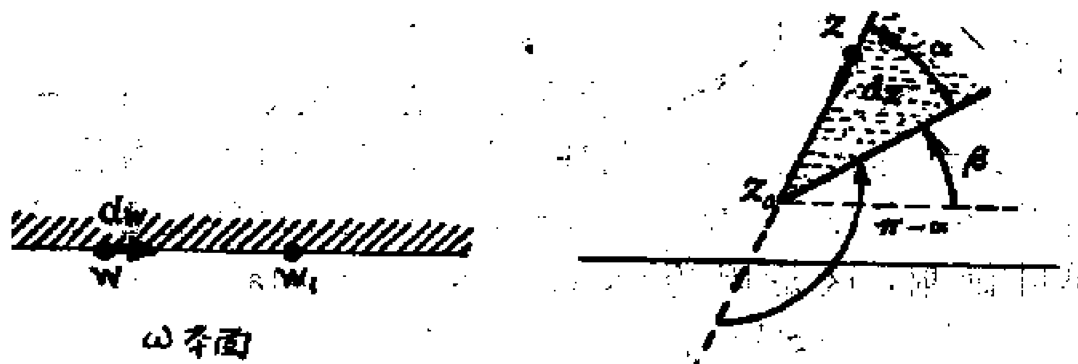


图 6.5.1

当然，我们已经知道这一点，但是以这种新方法研究映射，可为更一般的情况打下基础。

例 6.5.4. 试求一单叶映射，它把半带状域

$$S=\left\{z \mid \operatorname{Im}(z)\geqslant 0,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Re}(z)\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

映射为上半平面，并使$\pi/2$映射为1，$-\pi/2$映射为-1。（参看例 6.5.3.）。我们首先写出$\frac{dz}{dw}$的表达式，使它具有下面的性质：当w沿着负实轴从左到右移动时，$\arg dz$是一常量，当w经过点-1时，$\arg dz$突然改变一个角度$\pi/2$，当w从-1到1移动，$\arg dz$又保持常量。当w经过1时，$\arg dz$又突然改变一个角度$\pi/2$，最后，当w沿正实轴从1向右移动时，$\arg dz$再次保持常量。$\frac{dz}{dw}$的如下表达式就具有这些性质，即

$$\frac{dz}{dw}=A(w+1)^{-1/2}(w-1)^{-1/2}=A(w^2-1)^{-1/2}.$$

易见

$$\arg dz=\arg dw+\arg A-\frac{1}{2}\arg(w+1)-\frac{1}{2}\arg(w-1)$$

满足上述性质，这里A是一个常量。我们可利用它将整个带状域旋转（如果需要的话）、放大或缩小。在积分 dz/dw 后，又要引进一个积分常数。我们可用这常数来平移整个图形（如果需要的话）。这种能够放大、缩小、旋转或平移是非常重要的，因为不能根据任何想像就由顶点处的性质来精确的确定所求的映射。积分上式，便得

$$z=A\int_0^w(\omega^2-1)^{-1/2}d\omega+\beta.$$

现在$(\omega^2-1)^{-1/2}$是 $\sin^{-1}\omega$的导数，故可写作：

$$z=A\sin^{-1}w+\beta,$$

或

$$w=\sin\left(\frac{z}{A}-\beta\right).$$

最后，我们需要将 $\pm\pi/2$ 分别映射为 ±1。因此

$$\sin\left[(1/A)\frac{\pi}{2}-\beta\right]=1,$$

$$\sin\left[(1/A)\frac{\pi}{2}+\beta\right]=1.$$

记 $C=1/A=c_1+ic_2$，$B=b_1+ib_2$。于是

$$\sin(c_1\pi/2-b_1)\cosh(c_2\pi/2-b_2)=1,$$
$$\sinh(c_2\pi/2-b_2)\cos(c_1\pi/2-b_1)=0,$$
$$\sin(c_1\pi/2+b_1)\cosh(c_2\pi/2+b_2)=1,$$
$$\sinh(c_2\pi/2+b_2)\cos(c_1\pi/2+b_1)=0.$$

这些方程的解不是唯一的。但有一个解是 $c_1=1, c_2=b_1=b_2=0$. 这给出以下结果：

$$w=\sin z$$

读者容易证明，这个映射具有所希望的性质。

例 6.5.5. 试求一单叶映射，它将带状域 $S=\{z|\,0\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant\pi\}$ 映射为上半平面 $\mathrm{Im}(w)\geqslant 0$，并使得 w 平面上的原点对应于带状域的左端，而 z 平面上的原点映射为 $w=1$. 我们可把这问题看作扇形域问题的一种稍为特殊的情况来处理。我们希望当 w 沿着负实轴从左向右移动到原点时，$\arg dz$ 保持常量，w 经过原点时，$\arg dz$ 突然改变一个角度 π，然后当 w 沿着正实轴向右移动时，$\arg dz$ 又保持常量。由于这个原因，可设

$$\frac{dz}{dw}=Aw^{-1}.$$

将这式积分，得

$$z=A\int_1^w \omega^{-1}\,d\omega+B=A\mathrm{Log}w+B,$$

$$w=e^{(1/A)(z-B)}=e^{Cz+D}=Ke^{Cz},$$

因为 $z=0$ 映射为 $w=1$，故 $K=1$. 又由于当 z 为实数时 w 也是实数，故 C 必为实数。为了使

$$\lim_{x\to\infty} w=\lim_{x\to\infty} e^{Cx}=\infty,$$

C 必须是正数。当 $z=x+i\pi$ 时，

$$w=e^{Cx}(\cos C\pi+i\sin C\pi)$$

必须是负实数。因此，C 必须是奇整数。为了确定起见，取 $C=1$. 于是

$$w=e^z,$$

读者容易证明，这个映射具有所需的性质。

现在，我们准备讨论 Schwarz-Christoffel 变换。假设我们要把一个内角为 α_1, α_2, …, α_n 的 n 边多角形的内部映射为

上半平面，并使得顶点P_1，P_2，…，P_n映射为实轴上的点$-\infty<u_1<u_2<\cdots<u_n<\infty$。我们先从$\frac{dz}{dw}$具有如下性质的表达式开始，即当$w$经过$u_k$时，$\Delta\arg dz=\pi-\alpha_k$，即

$$\frac{dz}{dw}=A\prod_{k=1}^{n}(w-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}.$$

积分之，则有

$$z=A\int_{w_0}^{w}\prod_{k=1}^{n}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega+B.$$

这时，我们必须明确那些常数我们必须确定，以及必须从那些条件来确定它们。首先所有的α是由给定的多角形的内角来确定的。常数B可以用来平移多角形到z平面的任何位置上去。常量A可以用来放大、缩小以及旋转多角形。换言之，如果没有常数A和B，那么我们所映射的只是相似多角形，因此为了映射实际的多角形，我们有充分的自由来选择A与B。例如在三角形的情况下，我们有角——角——角的对称性，因此顶点u_1，u_2，u_3的映象可以随意指定。在四边形的情况下，内角并不足以确定相似图形。作为补充，我们必须再规定两个相邻边长度的比例。这表明，四个常数u_1，u_2，u_3，u_4只有三个可以任意指定。第四个必须这样选取，而使得函数

$$\int_{w_0}^{w}\prod_{k=1}^{4}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega$$

将四边形的相似形映射为原先给定的四边形。一般说来，对于n边多边形，除去内角以外，还必须规定$n-3$对相邻的边的比值。这表示所有的u_k中只有三个可以任意指定，其余$n-3$个必须由对称性来确定。

最后，我们必须确定被映射的多角形是否为封闭的。即问

$$\int_{w_0}^{-\infty}\prod_{k=1}^{n}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega$$

是否等于：

$$\int_{w_0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega\ .$$

令 w_0 为上半平面内一点，由于多角形的外角之和等于 2π，所以 $\sum_{k=1}^{n}(\pi-\alpha_k)=2\pi$. 因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k-\pi}{\pi}=-2.$$

从而对于充分大的 $|\omega|$，上述积分与 $1/\omega^2$ 的积分的性态类似。因此上面两个广义积分存在，并且具有相同的值。这是因为沿着上半平面的一个大半圆周的积分当半圆的半径趋于无限时，趋于零。

例 6.5.6. 试求一映射，它把顶点在 $z=-1$，$z=1$ 及 $z=\sqrt{3}\,i$ 的等边三角形映射为到上半平面，并使三个顶点分别映射为 $w=-1$，0，1，根据上面的讨论，我们有

$$\frac{dz}{dw}=A(w+1)^{-2/3}w^{-2/3}(w-1)^{-2/3},$$

或

$$\frac{dz}{dw}=A[w(w^2-1)]^{-2/3},$$

$$z=A\int_i^w\frac{1}{[\omega(\omega^2-1)]^{2/3}}d\omega+B$$

现在可确定 A 与 B，使得给定的顶点的象分别为 $w=-1,0,1$，例如

$$-1=A\int_i^{-1}\frac{1}{[\omega(\omega^2-1)]^{2/3}}d\omega+B,$$

$$1=A\int_i^{0}\frac{1}{[\omega(\omega^2-1)]^{2/3}}d\omega+B,$$

$$\sqrt{3}\, i = A\int_i^1 \frac{1}{[\omega(\omega^2-1)]^{2/3}}d\omega + B.$$

这三个积分都是广义积分，由于它们的性态与$\int_0^1 x^{-2/3}dx$相似，所以它们都存在，并且均为有限复数。

如果我们规定无穷远点为某个顶点的象，那么情况有些不同。在这情况下，在实轴上少了一个 u_k 作为顶点的象点。因此，如果第 n 个顶点（其内角为 α_n）是∞的象点，则

$$\frac{dz}{dw} = A\prod_{k=1}^{n-1}(w-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}$$

现在

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k-\pi}{\pi} = -2-\left(\frac{\alpha_n-\pi}{\pi}\right) = -1-\frac{\alpha_n}{\pi},$$

又由于$0<\alpha_n<\pi$，故

$$\int_{w_0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n-1}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega$$
$$=\int_{w_0}^{-\infty}\prod_{k=1}^{n-1}(\omega-u_k)^{(\alpha_k/\pi-1)}d\omega.$$

因此，和以前一样，多边形自身是封闭的。即在第 n 个顶点处是连接的。显然，在w平面上当w从正实轴移动到负实轴时，dz的幅角的改变为$\pi-\alpha_n$。在这情况下，因为我们已经固定了一个顶点的象点的位置，我们只能再任意指定两个象点，这表示在u_1，u_2，…，u_{n-1}中必须确定 $n-2$ 个。

例 6.5.7. 试求一映射它把顶点在 $z=-1, 1, i$ 的等腰直角三角形的内部映射为上半平面，并使得三个顶点分别映射为$w=-1$，1和∞。根据上面的讨论，则有

$$\frac{dz}{dw} = A(w+1)^{-3/4}(w-1)^{-3/4}$$
$$=A(w^2-1)^{-3/4},$$

故

$$z=A\int_0^w \frac{1}{(\omega^2-1)^{3/4}}d\omega+B,$$

其中A及B由以下方程确定：

$$-1=A\int_0^{-1}\frac{1}{(\omega^2-1)^{3/4}}d\omega+B,$$

$$1=A\int_0^{1}\frac{1}{(\omega^2-1)^{3/4}}d\omega+B,$$

$$i=A\int_0^{\infty}\frac{1}{(\omega^2-1)^{3/4}}d\omega+B.$$

这些积分都是广义积分，但它们都存在，并且均为有限复数。

习 题 6.5

1. 试求一函数，它将扇形域$S=\{z\,|0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$映射为单位园的内部。写出关于这个扇形域的Dirichlet问题的解。

2. 试求一函数，它将扇形域

$$S=\{z\,|0\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant\pi,\ \mathrm{Im}(z)\geqslant 0\}$$

映射为上半平面，并使原点映射为原点，而π映射为1．

3. 试求一函数，它把上半平面映射为D'（如图 6.5.2所示）。并求一流体在w平面内的“瀑布”上流动的速度势。

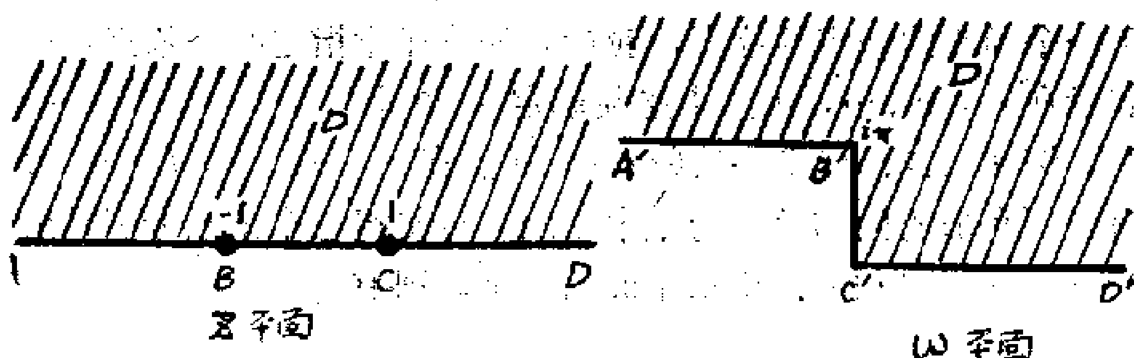


图 6.5.2

4. 试求一函数，它把上半平面D映射为如图 6.5.3 所

示之域 D'。

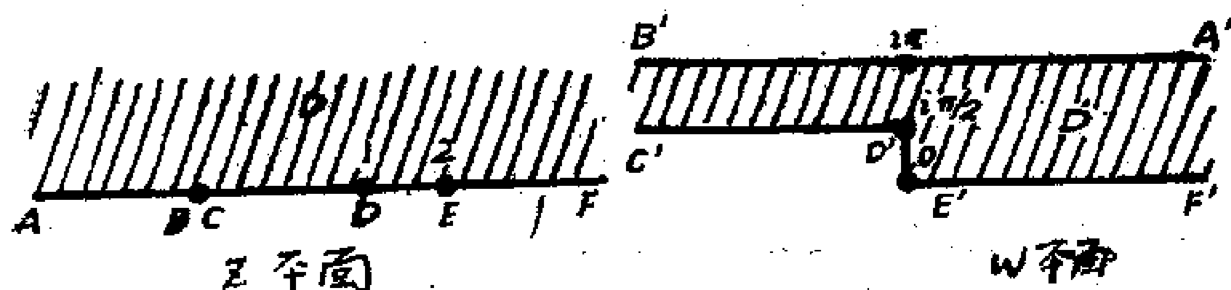


图 6.5.3

6.6 带有沉与洞的流动

我们在6.1节中导出的关于不可压缩的、无旋的均匀流体的流动方程是建立在如下假设的基础之上的，即在流体流动的区域内既没有沉也没洞。这表示复速度势在流动的区域内没有奇异点。在这一节内，我们要假设稍为一般的情况，即在流动区域的边界的某些点上，流体可以进入（有沉）或流出（有洞）的情况。

例 6.6.1. 试在上半平面内求一流体流动的速度势，其中假设实轴是一刚性边界，但在原点处有一裂缝，流动以一定常速度通过它进入上半平面。考虑函数 $w=A\log z=A(\ln|z|+i\arg z)$，其中 $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$，且 A 是实数。这函数在上半平面内是解析的。设 $w=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$；则当 $\arg z$ 是常量时，$\psi(x,y)=A\arg z$ 是常量，因此流线都是径向射线。速度为

$$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{Ax}{x^2+y^2},\quad v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{Ay}{x^2+y^2}.$$

在每单位时间内，流经半圆弧 $|z|=R$，$0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 的流体的流量是

$$\int_0^{\pi} \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}ds=\rho A\int_0^{\pi}d\theta=\pi\rho A,$$

它是一个与R无关的常量，这就是所求的情况，即流体在原点处以一定常速度进入上半平面并且向着所有的方向流出。

定义 6.6.1. 在强度为A的点z_0处，沅的复速度势是指函数$w(z)=A\log(z-z_0)$，这里A是正实常数。在强度为A的点z_0处，洞的复速度势是指函数$w(z)=-A\log(z-z_0)$，这里A是一个正的实常数。

例 6.6.2. 设有一宽度为h的直管道，其边界上某个有限点处有一强度为A的沅，试求流体在管道中的流动。不失一般性，可设此直管道是带状域$s=\{z|0<\mathrm{Im}(z)<h\}$，并设沅在原点。在这种情况下，我们不能应用例 6.6.1. 中的速度势，这是因为流体必然仃留在管道内而不能向各个方向流出。由对称性，流体将分两部分，一半流向管道的左边，另一半流向管道的右边，如果采用变换

$$\zeta=e^{\pi z/h}$$

将上述带状域映射为上半平面，则问题就变为半平面的问题，但是流沅已经移动。并且由于考虑到流体在管道内的流动，因此必须在适当的地方引进一个洞。原点$z=0$对应于$\zeta=1$. 在此变换下，半园$|z|=R<h$, $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$映射为$\zeta$的上半平面上的一段弧，这段弧从点$\zeta=1$的右边实轴上一点起经过$\zeta=1$的上方到$\zeta=1$的左边的一点止。可以证明流体在单位时间内流过这段弧的流量是$\pi\rho A$，这是因为在ζ平面上的$\zeta=1$处有一个强度为A的沅。因此，在$\zeta=1$处强度为A的沅被映射为$z=0$处强度为A的沅。反之亦然。又因为在直管道的左端点映射为$\zeta=0$，所以必须在$\zeta=0$处放置一个强度为$A/2$的洞，这样才能使从原点流出的流体流向直管道的左端点。因此映射后的问题变成ζ的上半平面在$\zeta=1$处有一个强度为A的沅，而在$\zeta=0$处有

一强度为 $A/2$ 的洞，所求的速度势函数为

$$w(\zeta)=A\log(\zeta-1)-(A/2)\log\zeta$$

$$=A\log(e^{\pi z/h}-1)-\frac{A}{2}\log e^{\pi z/h}$$

$$=A\log(e^{\pi z/h}-1)-\frac{A\pi}{2h}z.$$

例 6.6.3. 设直管道如习题 6.5.4 所示，并设在管边的左边很远处流体有一个均匀速度为 u 的流动流向右边。试求流体在管道内的流动。根据 Schwarz-Christoffel 变换，可以找到一个变换 $\zeta=f(z)$，将上述管道映射为上半平面，并使左端点映射为原点。这样，便转化成半平面问题，而在原点处有一个适当强度的沉。在单位时间内，流过左边给定的垂线的流体是 $\rho U\pi/2$，因此，在 ζ 平面内的原点处必须放置一个强度为 $U/2$ 的沉，而所求的速度势为：

$$w(z)=\frac{U}{2}\log\zeta=\frac{U}{2}\log f(z).$$

有一个特殊的位势函数非常有用，即"偶极子"的位势。考虑在 $ae^{i\alpha}$ 处强度为 A 的沉，以及原点处强度为 A 的洞，这两者合在一起的位势是

$$w=A\log(z-ae^{i\alpha})-A\log z$$

$$=-ae^{i\alpha}A\frac{\log(z-ae^{i\alpha})-\log z}{-ae^{i\alpha}}$$

$$=-aAe^{i\alpha}\frac{\log(z+\Delta z)-\log z}{\Delta z},$$

这里 $\Delta z=-ae^{i\alpha}$. 现在，令 a 趋于零，并令 A 趋于无穷而使 aA 为一常数，若 $aA=M$，则

$$w=-Me^{i\alpha}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\log(z+\Delta z)-\log z}{\Delta z}=\frac{-e^{i\alpha}M}{z}.$$

这就是位于原点处方向为 α 且强度为 M 的偶极子的位势。而位于 z_0 处方向为 α 强度为 M 的偶极的位势子为 $w=-e^{i\alpha}M/(z-z_0)$。考虑速度势，假设 $\theta=\arg(z-z_0)$，

$$\phi(x,y)=-\mathrm{Re}[e^{i\alpha}M/(z-z_0)],$$

$$=-\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\alpha}Me^{-i\theta}}{|z-z_0|}\right]$$

$$=\frac{-M\cos(\theta-\alpha)}{|z-z_0|}$$

$$=\frac{-M\,|z-z_0|}{|z-z_0|^2}[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha]$$

$$=-M\frac{x-x_0}{|z-z_0|^2}\cos\alpha-M\frac{y-y_0}{|z-z_0|^2}\sin\alpha$$

$$=-M\frac{d}{dn}\log|z-z_0|,$$

这里 d/dn 代表沿着方向 α 的方向导数。

例 6.6.4. 试证流体流经单位园柱体的位势是以速度为 U 的均匀流动与原点处的方向为 π 强度为 U 的偶极子的势之和。

我们已知（例 6.1.1.）位势是

$$w=U\left(z+\frac{1}{z}\right)=Uz-\frac{e^{i\pi}U}{z}.$$

沉与洞以及偶极子的位势在静电学、静磁学、热传导等等方面有重要的应用。我们已经知道（第 6.1 节）通过点 z_0 并且垂直于 xy 平面的一个均匀线电荷的势是

$$A\ln|z-z_0|=\mathrm{Re}[A\log(z-z_0)].$$

从一点热沉向各方向的径射线传导的热流动也具有相同的势。在 z_0 处的磁偶极子也有势 $w=-\mathrm{Re}[e^{i\alpha}M/(z-z_0)]$。在下节中我们将考虑点电荷、点沉与偶极子的连续分布的情况。

习 题 6.6

1. 画出例 6.6.2 与 6.6.3 的流动的一些流线。

2. 画出偶极子的一些流线。

3. 试证在保角变换下，强度为A的沉映射为强度为A的沉。即若$2\pi\rho A$是流体在单位时间内流过的以沉为中心、半径为R的园的流量，则它也是流经上述园在w平面上的象的流量。

4. 试证在保角变换$w=f(z)$下，z_0处强度为M的偶极子映射为位于$w_0=f(z_0)$处强度为$M|f'(z_0)|$的偶极子。问偶极子的方向改变吗？

6.7 体分布与面分布

在上节已指出一直线沉或洞（垂直于z平面）的复位势是$w=A\log(z-z_0)$，这里A是一实数，对于沉，取A为正实数，对于洞，取A为负实数。现在，如果沉或洞分布在一曲面薄片上，而这薄片垂直于z平面且与z平面交于曲线C，那么，位势为

$$w(z)=\int_C \omega(\xi,\ \eta)\log(z-z_0)d\ z_0,$$

其中$\omega(\xi,\eta)$是在曲线上$z_0=\xi+i\eta$处的密度，速度势为，

$$\phi(x,\ y)=\mathrm{Re}(w)=\int_C \omega(\xi,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,ds,$$

我们称它为单层势。

如果偶极子分析在一薄片上，且其方向均沿着C的法线方向，则势为

$$w(z)=-\int_C \frac{\omega(\xi,\eta)\,e^{i\alpha(\xi,\eta)}}{z-z_0}d\ z_0,$$

而速度势为

$$\phi(x,y)=\mathrm{Re}(w)=-\int_C \omega(\xi,\eta)\frac{d}{dn}\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,ds,$$

这里 d/dn 是沿着C的法线方向的方向导数，我们称此函数为双层数。

如果线沉或洞分布在xy平面的一个面积R上，其强度$\rho(\xi,\eta)d\xi\, d\eta$与平面図素$d\xi\, d\eta$成正比，则复位势为

$$w(z)=\iint_R \rho(\xi,\eta)\log(z-z_0)d\xi\, d\eta,$$

而速度势是

$$\phi(x,y)=\mathrm{Re}(w)=\iint_R \rho(\xi,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\, d\eta,$$

我们称它为体分布势。

显然，如果密度$\omega(\xi,\eta)$与$\rho(\xi,\eta)$是連续的，则这三个位势函数在那些不被沉、洞或偶极子所占的点处是调和的，一般地，若要证明这些势函数在被沉、洞或偶极子所占的点处也存在，则还需要对密度函数加上更强的条件。在此我们不考虑这个更一般地的问题，读者可参看 $O.D.$Kellogg，位势论基础(Foundations of Potential Theory). New York: Dover Publications, Inc.,1953.

有一种情况可得到肯定的答案，即考虑Cauchy型的一个积分。令C为一单闭曲线，且$f(\zeta)$为定义在C上的一个实値函数且在C上满足Lipschitz条件，由定理3.5.4，则

$$\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

对于C上的点z_0,积分在Cauchy主値意义下是存在的，并满足

$$\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=F(z_0^-)-f(z_0)$$
$$=F(z_0^+)+f(z_0),$$

这里 $F(z_0^-)$ 与 $F(z_0^+)$ 分别等于当 z 从 C 的内部以及外部趋于 z_0 时

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

的极限。现在令 $\zeta-z=re^{i\theta}$，则 $d\zeta=dre^{i\theta}+ire^{i\theta}d\theta$，且

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{re^{i\theta}}(dre^{i\theta}+ire^{i\theta}d\theta)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_C f(\zeta)d\theta+\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{r}dr,$$

$$\mathrm{Re}[F(z)]=\frac{1}{\pi}\int_C f(\zeta)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_C f(\zeta)\frac{d\theta}{ds}ds$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_C f(\zeta)\frac{d}{dn}\ln|\zeta-z|ds,$$

由此可见 $F(z)$ 的实部是双层势，因此，有如下的双层势的定理：

定理 6.7.1. 设 C 是一单闭曲线，$\omega(\xi,\eta)$ 是定义在 C 上的实值函数并满足 Lipschitz 条件，则双层势

$$\phi(x,y)=-\int_C \omega(\xi,\eta)\frac{d}{dn}\ln|\xi-z|ds$$

在 C 上的点 $z_0=x_0+iy_0$ 处依 Cauchy 主值的意义来说有意义，并且满足

$$\begin{aligned}\phi(x_0,y_0)&=\Phi(z_0^-)-\pi\omega(x_0,y_0)\\&=\Phi(z_0^+)+\pi\omega(x_0,y_0),\end{aligned}$$

这里 $\Phi(z_0^-)$ 与 $\Phi(z_0^+)$ 分别为当 z 从 C 的内部以及从 C 的外部趋于 C 上的点 z_0 时 $\phi(x,y)$ 的极限。

定理 6.7.2. 设 $u(x,y)$ 为任意的实值函数，而且在单闭曲

线C上及其内部有连续的二阶偏导数，则u在C内的值可以表示为一个单层势、一个双层势以及一个体分布的和。

证明 设(x_0, y_0)是C内一点，令$v=(-1/2\pi)\ln|z-z_0|$，并对域R应用Green引理，这里R是C与圆心在z_0半径为充分小的圆之间的区域，于是

$$\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dx\,dy = \int_C \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) ds$$

$$-\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho} \rho\, d\theta,$$

这里$r=|z-z_0|$. 在R内，$\nabla^2 v=0$，因此当$\rho\to 0$时，有

$$\frac{1}{2\pi}\iint_R (\nabla^2 u)\log r\,dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_C u\frac{d}{dn}\log r\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_C\left(\frac{du}{dn}\right)\log r\,ds,$$

$$+\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\theta - \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\rho}\rho\log\rho\,d\theta,$$

由此得

$$u(x_0, y_0) = \iint_R \left(\frac{\nabla^2 u}{2\pi}\right)\log r\,dx\,dy + \int_C\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{du}{dn}\right)\log r\,ds$$

$$-\int_C\left(-\frac{1}{2\pi}u\right)\frac{d}{dn}\log r\,ds,$$

由此可见$u(x_0, y_0)$可以表作以$\nabla^2 u/2\pi$为密度的一个体分布，以$(-1/2\pi)du/dn$为密度的一个单层势以及以$-u/2\pi$为密度的一个双层势之和。

推论 6.7.1. 设u满足定理6.7.2的条件，并设在一条单闭线路C所围域内调和，则u在C内一点的值可以表为C上一个单层势与一个双层势之和，即

$$u(x_0, y_0)=\int_C\left(-\frac{1}{2\pi}\ \frac{du}{dn}\right)\log r\,ds-\int_C\left(-\frac{u}{2\pi}\right)\frac{d}{dn}\log r\,ds.$$

这个推论沒有肯定说这种将 u 表为 C 上的一个单层势和一个双层势的方法是唯一的。事实上，在下节中将证明存在一个双层势，应用它可以解决 Dirichlet 问题。

推论 6.7.2. 设 u 在域 D 内调和，则

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, y)\,d\theta,$$

其中 $x=x_0+R\cos\theta$，$y=y_0+R\sin\theta$，R 是园心在 (x_0, y_0) 的园的半径，并使园域 $|z-z_0|\leqslant R$ 含在域 D 内，换言之，u 在园心的值等于它在园周上的平均值。

证明 对园域 $|z-z_0|\leqslant R$ 应用定理 6.7.2. 便立即可得推论，现取 C 为 $|z-z_0|=R$，于是

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(x, y)\,R\,d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\log R\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} R\,d\theta$$

但

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} R\,d\theta=\iint_{|z-z_0|<R}\nabla^2 u\,dx\,dy=0.$$

所以

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, y)\,d\theta.$$

习 题 6.7

1. 在三維空间中，体分布的势，单层势和双层势分别为：

$$\iiint_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,\quad \iint_S \frac{\omega(\xi,\eta)}{r}\,dS \text{ 及}$$

$$-\iint_S \omega(\xi,\eta)\frac{d}{dn}\ \frac{1}{r}dS,$$

这里 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 试在三維空间中证明与定理 6.7.2. 及推论 6.7.1. 推论 6.7.2. 相对应的命题。

2. 若 u 在园 $|z-z_0|=R$ 上及园内调和，试证

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi R^2}\iint_D u\,dx\,dy$$

成立，其中 D 是园域 $|z-z_0|\leqslant R$.

6.8 奇异积分方程

从前节可见 Cauchy 型积分与位势论之间有密切关系。在本节中将对此种观念稍加扩充，并证明某些包含 Cauchy 型积分的奇异积分方程可解。这类积分方程在弹性力学范围内有广泛的应用。最后将证明 Dirichlet 问题可以用积分方程表示，从而可证 Dirichlet 问题的另一个存在定理。

例 6.8.1. 设 C 为一单闭光滑曲线，用 D_- 记 C 的内部，D_+ 记 C 的外部。试求一分片(Piecewise) 解析函数 $F(z)$，它在 D_- 及 D_+ 内解析，而使得 $\lim\limits_{|z|\to\infty} F(z)=0$,

并且

$$F(z_0^-)-F(z_0^+)=f(z_0),$$

这里 z_0 是 C 上的一点，$f(z)$ 是定义在 C 上的函数并且在 C 上满足 Lipschitz 条件，$F(z_0^-)$ 与 $F(z_0^+)$ 分别表示当 z 由 D_- 及 D_+ 趋向于 z_0 时 $F(z)$ 的极限。这个问题应用定理 3.5.4 可以很容易得到解决。事实上

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

解决了这个问题。这是因为由定理 3.5.4，如果 z_0 为 C 上的点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=F(z_0^-)-\frac{1}{2}f(z_0)$$

$$=F(z_0^+)+\frac{1}{2}f(z_0),$$

这里积分是在 Cauchy 主值意义下定义的。因此就得到

$$F(z_0^-)-F(z_0^+)=f(z_0).$$

显然其他条件被满足。实际上，这个问题的解是唯一的，这是因为两个解之差 G 满足

$$G(z_0^-)-G(z_0^+)=0.$$

因此 $G(z)$ 在非延拓的平面上是解析的，当且当 z 趋于 ∞ 时趋于零。从而 $G(z)=0$.

例 6.8.2. 设 C 是一单闭光滑曲线，$g(z_0)$ 是 C 上给定的函数，并满足 Lipschitz 条件，试解如下的奇异积分方程：

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=g(z_0),$$

这里 $f(z)$ 是待求的函数。利用定理 3.5.4，可以得到一个解。引入分片解析的函数

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

则

$$F(z_0^-)+F(z_0^+)=g(z_0),$$

考虑

$$G(z)=\begin{cases}F(z), & z\text{ 在 }D_-\text{ 中}\\ -F(z), & z\text{ 在 }D_+\text{ 中}.\end{cases}$$

那么

$$G(z_0^-)-G(z_0^+)=g(z_0),$$

并由上例

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

所以

$$f(z_0)=F(z_0^-)-F(z_0^+)=G(z_0^-)+G(z_0^+)$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{C+}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta.$$

可以证明，当 $f(z)$ 用这个积分表示时，$f(z)$ 在 C 上满足 Lipschitz 条件(*)。因此，$f(z)$ 与 $g(z)$ 的表示式是完全对称的。这意味着积分方程的解是唯一的。

我们还可利用定理 3.5.4 导出一个重要公式，这公式在解 Cauchy 型奇异积分方程是很有用的。设

$$g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta,$$

$$h(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta,$$

这里 $f(z)$，因而 $g(z)$ 与 $h(z)$ 在 C 上都满足 Lipschitz 条件，其中 C 是一光滑单闭曲线。问题是要将 $h(z)$ 用 $f(z)$ 表示出来（假如可能的话）。我们定义下列分片解析函数：

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

则

(*) 见N.I. Muskhelishvili，奇异积分方程(singular Integral Equations) Groningen, Holland: P.Noordhoff, N.V.,1953, PP.46－48

$$G(z_0^-)=\frac{1}{2}f(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=\frac{1}{2}f(z_0)+g(z_0),$$

$$H(z_0^-)=\frac{1}{2}g(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=\frac{1}{2}g(z_0)+h(z_0)$$

代入到 $H(z)$ 的定义中去，从而

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{G(\zeta^-)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{4\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=G(z)-\frac{1}{2}G(z)=\frac{1}{2}G(z).$$

所以 $H(z_0^-)=\frac{1}{2}G(z_0^-)$，并且

$$h(z_0)=\frac{1}{2}G(z_0^-)-\frac{1}{2}\left[G(z_0^-)-\frac{1}{2}f(z_0)\right]=\frac{1}{4}f(z_0)$$

或者

$$\frac{1}{4}f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{g(\tau)}{\tau-z_0}d\tau$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C+}\frac{1}{\tau-z_0}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta d\tau.$$

这个最后的结果称为 Poincaré－Bertrand 公式。

例 6.8.3．解下述积分方程：

$$g(z_0)=af(z_0)+\frac{b}{\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta,$$

这里 a 及 b 是常数，$a\neq b$．C 是一光滑单闭曲线，$g(z)$ 在 C 上满足 Lipschitz 条件，且 z_0 在 C 上。首先，将方程乘以 a，得

$$ag(z_0)=a^2f(z_0)+\frac{ab}{\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta.$$

再将原方程乘以 $b/\pi i(z-z_0)$ 并沿 C_+ 关于 z_0 积分，利用 Poincaré－Bertrand 公式，

$$\frac{b}{\pi i}\int_{C+}\frac{g(z_0)}{z_0-z}dz_0=\frac{ab}{\pi i}\int_{C+}\frac{f(z_0)}{z_0-z}dz_0$$

$$+\frac{b^2}{(\pi i)^2}\int_{C+}\left[\frac{1}{z_0-z}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right]dz_0$$

$$=\frac{ab}{\pi i}\int_{C+}\frac{f(z_0)dz_0}{z_0-z}+b^2f(z).$$

两式相减并乘以 $1/(b^2-a^2)$，我们得

$$f(z)=\frac{a}{b^2-a^2}g(z)-\frac{b}{\pi i(b^2-a^2)}\int_{C+}\frac{g(z_0)dz_0}{z_0-z}.$$

现在让我们回到 Dirichlet 问题。回忆上节，已知可把在一光滑单闭曲线C内调和的某个函数表作C上的一个双层势。设C具有连续曲率。我们要解决如下的 Dirichlet 问题。求一在C内调和的函数，它在C上及其内部是連续的，而在C上取实的边界值 $g(z_0)$，这里 z_0 是C上的点。我们要寻求用双层势来表示的解，正如在上节看到的，若 $f(\zeta)$是实的，且令

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

则 $\mathrm{Re}[F(z)]$是一双层势。若令 z 由C的内部趋于 z_0，则

$$F(z_0^-)=\frac{1}{2}f(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta.$$

为要使 $\mathrm{Re}[F(z)]$ 是 Dirichlet 问题的一个解，只要 $F(z_0^-)=g(z_0)$，从而

$$g(z_0)=\frac{1}{2}f(z_0)+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left[\int_{c+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{2}f(z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{C+}f(\zeta)\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}\right)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}f(z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{C+}f(\zeta)\frac{d}{dn}\ln|\zeta-z_0|\,ds$$

$$=\frac{1}{2}f(z_0)-\frac{1}{2\pi}\int_{C+}f(\zeta)\frac{\cos\theta}{|\zeta-z_0|}ds,$$

这里θ是矢量$\zeta-z_0$与C在z_0处的外法线之间的夹角。利用C的曲率的連续性，不难证明$|\zeta-z_0|^{-1}\cos\theta$在$C$上是連续的。这样我们必须解下面的Fredholm积分方程：

$$f(z_0)=2g(z_0)+\frac{1}{\pi}\int_{C+}f(\zeta)K(\zeta,z_0)d\zeta,$$

这里K在c上是ζ与z_0的連续函数。

我们仅叙述而不证明如下的Fredholm方程的结果。Fredholm积分方程具有唯一的解的充要条件是对应的齐次方程($g\equiv0$)只有平凡解($f\equiv0$)*。利用此结果，可得Dirichlet问题的一个存在定理，其方法是证明方程

$$f(z_0)=\frac{1}{\pi}\int_{C+}f(\zeta)K(\zeta,z_0)d\zeta$$

仅有平凡解。考虑

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

---

* 其証明可在J.W.Dettman："物理与工程中的数学方法(Mathematical Methods in physics and Engineering) New York：McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.中找到，试将这结果与7.7及7.8节的Sturm-Liouville问题相比较。

对于齐次问题

$$\operatorname{Re}[H(z_0^-)]=0,$$

这意味着在C的内部 $\operatorname{Re}[H(z)]\equiv0$，这又意味着 $\operatorname{Im}[H(z)]=k$，这里$k$为一常量。所以

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=i\,k.$$

当z在C之外时，考虑积分

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\text{在}C\text{之外}.$$

由定理3.5.4，

$$H(z_0^-)-G(z_0^+)=f(z_0),$$

$$i\,k-G(z_0^+)=f(z_0).$$

由于$f(z_0)$是实数，故$\operatorname{Im}[G(z_0^+)]=k$.这表示$\operatorname{Im}[G(z)]=k$，从而$G(z)$是一常量。但$\lim\limits_{z\to\infty}G(z)=0$.因此 $k=0$，$G(z_0^+)=0$，因而$f(z_0)\equiv0$。这就证明了非齐次积分方程有一个解，这就证明了Dirichlet问题解的存在性。积分方程的实际解可以用级数展开的技巧求出。*

习　题 6.8

1．利用Poincaré-Bertrand公式解例6.8.2.

2．证明在Poincaré-Bertrand公式中的二重积分不能用交换积分次序的方法计算。

3．证明例6.8.3的积分方程的解是唯一的。

4．证明$\frac{d}{dn}\ln|z-z_0|$在C上是连续的，这里z与z_0都在C上，并且C具有连续的曲率。

---

* 参看 J.W.Dettman, Mathematical Method in Physics and Engineering, PP.246-258.

第七章 常微分方程

7.1 分离变量法

我们知道：常微分方程在工程和科学上起着非常重要的作用，在解一些偏微分方程时，常微分方程的作用也是很重要的，这一节我们将考虑偏微分方程中的分离变量法，来说明它的作用。

在大多数应用中，我们都是寻找一个实变量的实值函数使它满足一个给定的微分方程和某些边界或初始条件。由于这个缘故，问题通常是一个实变量问题。然而如果在复平面上考虑这些问题将使我们得到更多的认识，这正是在复变函数理论一书中包含这些研究的理由。

考虑半径为R的园域里的 Dirichlet 问题：确定一个函数$u(x,y)$，它在$|z|<R$内是调和的，在$|z|\leqslant R$内是连续的，并且在$|z|=R$上取得给定的边界值$g(\theta)$。在极坐标下，Laplace 方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

让我们寻求这样一个解，它是θ的函数与一个r的函数的乘积，即$u(r,\theta)=v(r)w(\theta)$，则

$$v''w+\frac{1}{r}v'w+\frac{1}{r^2}vw''=0,$$

$$\frac{w''}{w}=\frac{-r^2v''-rv'}{v}.$$

左边只是 θ 的函数，而右边仅是 r 的函数，θ 和 r 必须恒满足这个方程，此因

$$\frac{w''}{w}=-\frac{r^2v''+rv'}{v}=a.$$

这里 a 是常数，我们必须寻求两个常微分方程的解：

$$w''-aw=0,$$

$$r^2v''+rv'+av=0.$$

先考察第一个方程，若 a 是正数，则

$$w(\theta)=Ae^{\sqrt{a}\theta}+Be^{-\sqrt{a}\theta},$$

但这不是 θ 的周期函数，为了要使 w 成为連续函数，即 $w(0)=w(2\pi)$，除非 $A=B=0$。因此 $a\leqslant 0$，令 $a=-b^2$，则 $w''+b^2w=0$，从而

$$w(\theta)=A\cos b\theta+B\sin b\theta$$

为了使 w 成为連续函数并具有連续的导数，应有 $b=n$，$(n=0,1,2,\cdots)$。故 $a=-n^2$，从而第二个方程变为：

$$r^2v''+rv'-n^2v=0,$$

这是 Euler 微分方程，它具有解 r^n 与 r^{-n}。如果 $n\neq 0$，则必须排除 r^{-n}，因为它在原点处不是有限的。最后我们得到 Laplace 方程如下可能的解

$$u_0(r,\theta)=1,\ u_{n_1}(r,\theta)=r^n\cos n\theta,\ u_{n_2}(r,\theta)=r^n\sin n\theta.$$

然而这些解在 $r=R$ 上不能取得给定的边值 $g(\theta)$。但是，由于偏微分方程的线性性质，我们取这些解的有限个或无限多个的线性组合，故

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nr^n\cos n\theta+b_nr^n\sin n\theta).$$

对于 $r=R$，

$$u(R,\theta)=g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nR^n\cos n\theta+b_nR^n\sin n\theta).$$

这是 $g(\theta)$ 的 Fourier 级数，若

$$a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

我们将在 8.1 节证明，如果 $g(\theta)$ 是连续的，$g(0)=g(2\pi)$，并且 $g(\theta)$ 有分段连续的导数，则它的 Fourier 级数一致收敛于它自己，所以，我们的解是

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)d\phi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)d\phi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{2r^n}{R^n}\cos n(\theta-\phi)d\phi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2r^n}{R^n}\cos n(\theta-\phi)-1\right]d\phi.$$

考虑函数$\frac{\zeta+z}{\zeta+z}$，$\zeta=Re^{i\phi}$，$z=re^{i\theta}$，$r<R$.

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=1+\frac{2z}{\zeta-z}=1+2\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2r^n}{R^n}[\cos n(\theta-\phi)+i\sin n(\theta-\phi)]-1.$$

故

$$u(r_1\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)Re\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right]d\phi$$

$$=Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\phi$$

$$=Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{(\zeta+z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

这仍是 Poisson 公式。

Dirichlet 问题的解，说明了分离变量法。作为另一个例子，我们考虑在极坐标下的 Helmholtz 方程 $\nabla^2u+\lambda u=0$，即

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\lambda u=0.$$

假定 $u(r,\theta)=v(r)w(\theta)$，则

$$wv''+\frac{1}{r}wv'+\frac{1}{r^2}vw''+\lambda vw=0,$$

即

$$\frac{w''}{w}=-\frac{r^2v''+rv'+\lambda r^2v}{v}=-n^2.$$

这样，我们便得到两个常微分方程

$$w''+n^2w=0,$$

$$r^2v''+rv'+(\lambda r^2-n^2)v=0.$$

倘若在第二个方程中，作变量替换 $x=\sqrt{\lambda}r$，则得到

$$x^2v''+xv'+(x^2-n^2)v=0,$$

这里的导数是 v 对 x 求导数，这是 Bessel 微分方程。以后我们将要详细地研究它的解。

作为最后一个例子，我们考虑球坐标下的 Laplace 方程，即

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\phi}{\rho^2}\ \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$+\frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

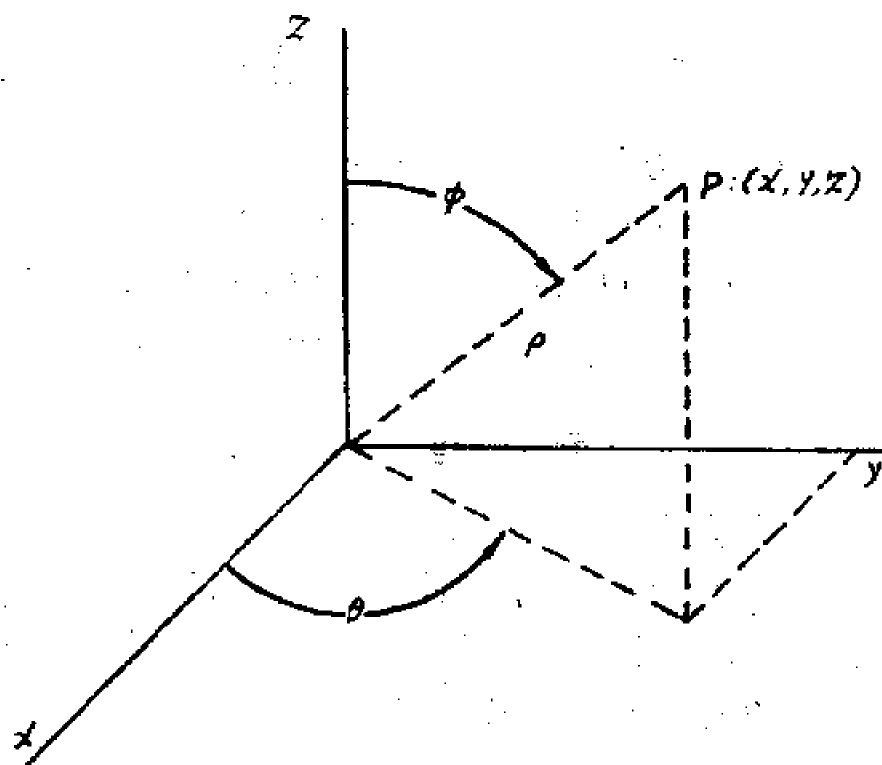


图 7.1.1

假设 $u(\rho,\theta,\phi)=f(\rho)g(\theta)h(\phi)$，则

$$ghf''+\frac{2}{\rho}ghf'+\frac{fg}{\rho^2}h''+\frac{\cot\phi}{\rho^2}fgh'$$

$$+\frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi}fhg''=0,$$

$$\frac{\rho^2 f''+2\rho f'}{f}=-\left(\frac{h''}{h}+\cot\phi\frac{h'}{h}+\frac{1}{\sin^2\phi}\ \frac{g''}{g}\right)=a,$$

$$\rho^2 f''+2\rho f'-af=0$$

$$\frac{\sin^2\phi h''+\sin\phi\cos\phi h'+a\sin^2\phi h}{h}=-\frac{g''}{g}=n^2,$$

$$g''+n^2g=0,$$

$$\sin^2\phi h''+\sin\phi\cos\phi h'+a\sin^2\phi h-n^2h=0.$$

在最后方程式中，作变量替换 $x=\cos\phi$，则方程变为

$$(1-x^2)h''-2xh'+\left(a-\frac{n^2}{1-x^2}\right)h=0.$$

这是伴随 Legendre 方程，如果 $n=0$，我们有

$$(1-x^2)h''-2xh'+ah=0$$

这是 Legendre 方程。以后我们将要细致的研究 Legendre 方程和伴随 Legendre 方程的解，它们之间有密切的联系。

习　题　7.1

1．考虑常微分方程 $x^2y''+axy'+by=0$ 这里 a 和 b 是常数，假设解的形状为 $y=x^m$，证明这个方程有解 $y_1=x^{m_1}$ 与 $y_2=x^{m_2}$，其中 m_1 与 m_2 是特征方程 $m(m-1)+am+b=0$ 的根。

2．考虑在球坐标下 Helmholtz 方程 $\nabla^2u+\lambda u=0$ 的分离变量法，证明径向部分 $f(\rho)$ 满足方程

$$\rho^2f''+2\rho f'+\lambda\rho^2f-af=0,$$

这里 a 是一个分离常数，令 a 为 $n(n+1)$，这里 n 是一个整数。作替换 $x=\lambda^{\frac{1}{2}}\rho$ 与 $y=\rho^{\frac{1}{2}}f$，证明 y 满足 Bessel 方程

$$x^2y''+xy'+\left[x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.$$

3．假定 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

有一个解 $P_n(x)$，这里 n 是一个非负的整数，证明伴随 Legendre 方程

$$(1-x^2)u''-2xu'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]u=0$$

有一个解 $u=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$. 其中 m 是一个非负的整数。

7.2 存在定理与唯一性定理

在讨论常微分方程时，首先碰到这样的问题："这样形成的问题是否有解？且解是否是唯一的？"我们将证明一些存在和唯一性定理以说明解决这个问题的一般途径。

定理 7.2.1. 设 $u(t,x)$ 是实变量 t 与 x 的连续的实数值函数，定义在矩形域 $R=\{(t,x)|\ |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$ 上，设 $u(t,x)$ 在 R 内满足 Lipschitz 条件，这就是说，存在一正常数 K，使得在 R 内任意两点 (t,x_1) 与 (t,x_2)，有 $|u(t,x_1)-u(t,x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|$. 则存在唯一的函数 $x(t)$，使得 $\dot{x}=u[t,x(t)]$ 对于满足 $|t-t_0|\leqslant c=\min[a,b/M]$ 的一切 t 成立，且满足初始条件 $x(t_0)=x_0$，这里 $M=\max\limits_{(t,x)\in R}|u(t,x)|$.

证明 我们寻求积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x(\tau)]d\tau$$

的一个解，因为这个方程的解显然满足 $\dot{x}=u(t,x)$ 和 $x(t_0)=x_0$。我们用迭代法来解这个积分方程。作为第一级近似，我们取 $x_0(t)=x_0$，于是

$$x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}u(\tau,x_0)d\tau,$$

$$x_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x_1(\tau)]d\tau,$$

……………………………………

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x_n(\tau)]d\tau$$

在 $|t-t_0|\leqslant c$ 时，我们能够证明每一个逐次逼近都含在R内，例如

$$|x_1(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}u(\tau,x_0)d\tau\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b$$

假设 $|x_k(t)-x_0|\leqslant b$，则

$$|x_{k+1}(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}u[\tau,x_k(t)]d\tau\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b,$$

因此，由数学归纳法，对所有n都有 $|x_n(t)-x_0|\leqslant b$.

考虑级数$x_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[x_n(t)-x_{n-1}(t)]$，它的第$n$项的部份和为$x_N(t)$。如果 $|t-t_0|\leqslant c$，我们能证明

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\leqslant\frac{MK^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}\leqslant\frac{M}{K}\frac{(Kc)^n}{n!},$$

仍用数学归纳法证明，令$n=1$，则

$$|x_1(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}u(\tau,x_0)d\tau\right|\leqslant M|t-t_0|.$$

假设不等式对于$n=k$成立，即

$$|x_k(t)-x_{k-1}(t)|\leqslant\frac{MK^{k-1}|t-t_0|^k}{k!},$$

则

$$|x_{k+1}(t)-x_k(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\{u[\tau,x_k(\tau)]-u[\tau,x_{k-1}(\tau)]\}d\tau\right|$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}K|x_k(\tau)-x_{k-1}(\tau)|d\tau\leqslant\frac{MK^k}{k!}\int_{t_0}^{t}|\tau-t_0|^kd\tau$$

$$\leqslant\frac{MK^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}.$$

所以，这个不等式对所有n都成立，因此 Weierstrass 的M—

判别法知级数

$$x_0+\sum_{n=1}^{\infty}[x_n(t)-x_{n-1}(t)]$$

在 $|t-t_0|\leqslant c$ 内一致且绝对收敛，它的前 n 项部份和 $x_N(t)$ 一致收敛于一个連续函数 $x(t)$，令 N 充分大使得 $|x(t)-x_N(t)|<\varepsilon$ 对于所有滿足 $|t-t_0|\leqslant c$ 的 t 都成立，则

$$|u[t,x(t)]-u[t,x_N(t)]|\leqslant K|x(t)-x_N(t)|<K\varepsilon$$

由于 ε 是任意的，这就是说证明了

$$\lim_{N\to\infty}u[t,x_N(t)]=u[t,x(t)]$$

对 t 一致地成立，从而

$$x_N(x)=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x_{N-1}(t)]d\tau$$

$$x(t)=\lim_{N\to\infty}x_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\lim_{N\to\infty}u[\tau,x_{N-1}(t)]d\tau$$

$$=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x(\tau)]d\tau$$

这就证明了 $x(t)$ 滿足积分方程。

留下的需要证 $x(t)$ 是唯一的解。假设 $x^*(t)$ 是另外一个解，则

$$x^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}u[\tau,x^*(\tau)]d\tau,$$

$$|x^*(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}u[\tau,x^*(\tau)]d\tau\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant MC,$$

$$|x^*(t)-x_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[u(\tau,x^*)-u(\tau,x_0)]d\tau\right|$$

$$\leqslant K\left|\int_{t_0}^{t}|x^*(t)-x_0|\,d\tau\right|$$

$$\leqslant MK\left|\int_{t_0}^{t}|\tau-t_0|\,d\tau\right|=\frac{MK|t-t_0|^2}{2}\leqslant\frac{MKC^2}{2},$$

$$|x^*(t)-x_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [u(\tau,x^*)-u(\tau,x_1)]d\tau\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{t_0}^{t} |x^*(\tau)-x_1(\tau)|\,d\tau\right|$$
$$\leqslant \frac{MK^2}{2}\left|\int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^2 d\tau\right|$$
$$=\frac{MK^2|t-t_0|^3}{3!}\leqslant\frac{MK^2C^3}{3!}.$$

由数学归纳法易知

$$|x^*(t)-x_N(t)|\leqslant\frac{MK^NC^{N+1}}{(N+1)!}<\varepsilon$$

对于充分大的N成立，因此

$$|x^*(t)-x(t)|\leqslant|x^*(t)-x_N(t)|+|x(t)-x_N(t)|<2\varepsilon$$

由于ε是任意数，所以$x^*(t)=x(t)$，这就完成证明。

对于一阶微分方程组有相似的定理，我们只考虑这些定理中的一种，为了在代数上简单起见，我们只考虑两个一阶微分方程组。

$$\dot{x}=u(t,x,y)$$
$$\dot{y}=v(t,x,y)$$

或

$$\dot{z}=\dot{x}+i\dot{y}=u(t,x,y)+iv(t,x,y)=f(t,z)$$

如果$\dot{z}=f(t,z)$有一个解$z(t)=x(t)+iy(t)$满足初始条件$x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$，即$z(t_0)=x_0+iy_0$，那么这个解满足积分方程

$$z(t)=x(t)+iy(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} u(\tau,x,y)d\tau$$
$$+iy_0+i\int_{t_0}^{t} v(\tau,x,y)d\tau$$
$$=z_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,z(\tau))d\tau.$$

定理 7.2.2. 设 $f(t,z)$ 是实变量 t 及复变量 z 的一連续复数値函数，定义域在区域

$$R=\{(t,z)|\ |t-t_0|\leqslant a,\ \ |z-z_0|\leqslant b\}.$$

设 $f(t,z)$ 在 R 内滿足 Lipschitz 条件，即存在一个正常数 K 对于 R 内的任意两点 (t,z_1) 与 (t,z_2)，有 $|f(t,z_1)-f(t,z_2)|\leqslant K\ |z_1-z_2|$．则存在一个唯一的函数 $z(t)$ 使得 $\dot{z}(t)=f[t,z(t)]$ 对 $|t-t_0|\leqslant c=\min[a,b/M]$ 成立，且 $z(t_0)=z_0$，这里 $M=\max\limits_{(t,z)\in R}|f(t,z)|$．

证明 我们不给出这个定理的证明，因为它可以由定理 7.2.1 的证明直接得出，读者可详细地加以叙述以作为对自己的一种检查。

例 7.2.1 证明二阶微分方程

$$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=0$$

滿足 $x(0)=1,\dot{x}(0)=1$ 条件的解存在且唯一。设 $x=x(t)$，$\dot{x}(t)=y$ 则 $\dot{y}=3y-2x$，$\dot{z}=\dot{x}+i\dot{y}=y+3iy-2ix=f(z)$．现在，$f(z)$ 对一切 z 都是連续的，因而

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|y_1-y_2+3i(y_1-y_2)-2i(x_1-x_2)|$$

$$\leqslant 4\ |y_1-y_2|+2\ |x_1-x_2|\leqslant 6\ |z_1-z_2|$$

因此，$f(z)$ 对于所有的 t 和 z 都滿足 Lipschitz 条件。由定理 7.2.2 便证明了解存在且唯一的，考察一下迭代过程是有意义的。

设 $z_0=1+i$，则

$$z_1=1+i+\int_0^t(1+i)d\tau=1+t+i(1+t),$$

$$z_2=1+i+\int_0^t[1+\tau+i(1+\tau)]d\tau$$

$$=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)+i\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right).$$

这样继续迭代下去，便得 $z(t)=e^t+ie^t$ 的幂级数，这个函数就是方程唯一的解。

例 7.2.2. 证明二阶线性微分方程

$$\ddot{x}+a(t)\dot{x}+b(t)x=0$$

在区间 $|t-t_0|\leqslant c$ 内满足 $x(t_0)=x_0$，$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$ 解是存在且唯一。这里假设在 $|t-t_0|\leqslant c$ 内 $a(t)$ 与 $b(t)$ 是連续的。设 $x=x(t)$，$y=\dot{x}(t)$，则 $\dot{y}=-[a(t)y+b(t)x]$ 及 $\dot{z}=\dot{x}+i\dot{y}=y-a(t)y-ib(t)x=f(t,z)$. 显然，$f(t,z)$ 在 $|t-t_0|\leqslant c$ 内对一切 z 都是連续的，而且

$$\begin{aligned}|f(t,z_1)-f(t,z_2)| &= |y_1-y_2-ia(t)(y_1-y_2) \\ &\quad -ib(t)(x_1-x_2)| \\ &\leqslant |y_1-y_2|+A|y_1-y_2|+B|x_1-x_2| \\ &\leqslant (1+A+B)|z_1-z_2|\end{aligned}$$

这里 $A=\max|a(t)|$，及 $B=\max|b(t)|$，其中 t 满足 $|t-t_0|\leqslant c$. 因此 $f(t,z)$ 滿足 Lipschitz 条件，这就证明了方程的解的存在与唯一性。

在复平面上还迂到另一种情况，假设 $w'=f(z,w)$，$w(z_0)=w_0$，在什么情况下微分方程的初始值问题，将有唯一的解？首先，我們希望有一个解 $w(z)$ 在某区域 D 内是可微分。那么在 D 内

$$w''=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\ \frac{\partial w}{\partial z}$$

必須存在，因此，在 D 内 f_z 必須存在，并且在 w 平面内有一区域，在这个域内 f_w 存在，为了这些缘故，自然要求 $f(z,w)$ 在 $|z-z_0|\leqslant a$，$|w-w_0|\leqslant b$ 上为两个复变量 z 与 w 的解析函数。我们将证明下述定理：

定理 7.2.3. 设 $f(z,w)$ 对于 $|z-z_0|\leqslant a$，$|w-w_0|\leqslant b$ 为两个复变量 z 与 w 的解析函数，则存在一个唯一的解析函数

$w(z)$满足 $w'=f(z,w)$ 与 $w_0=w(z_0)$.

第一证明 不失一般性不妨假设 $w_0=z_0=0$. 如果不这样，我们可作变量替换 $w-w_0\to w$ 与 $z-z_0\to z$，根据 $f(z,w)$ 在 $|z|\leqslant a$, $|w|\leqslant b$ 上的解析性，我们可以从 0 到 z 沿直线路径积分 $f(z,w)$，于是

$$w(z)=\int_0^z f[\zeta,w(\zeta)]d\zeta=\int_0^1 f[zt,w(zt)]zdt.$$

从这点开始，以下的证明几乎相当于定理7.2.1的证明。例如，我们用迭代法解积分方程，取 $w_0=0$.

$$w_1(z)=\int_0^1 f[zt,0]zdt,$$

$$w_2(z)=\int_0^1 f[zt,w_1(zt)]zdt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_n(z)=\int_0^1 f[zt,w_{n-1}(zt)]zdt.$$

则

$$|w_n(z)|=\left|\int_0^1 f[zt,w_{n-1}(zt)]zdt\right|\leqslant M|z|\leqslant b,$$

其中假设 $|z|\leqslant c=\min[a,b/M]$，这里 $M=\max|f(z,w)|$，唯一的解是下面级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}[w_n(z)-w_{n-1}(z)].$$

与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{K}(K|z|)^n$$

比较，便知上面级数是绝对收敛并且一致收敛的。事实上，我们有

$$|w_1(z)|=\left|\int_0^1 f(zt,0)zdt\right|\leqslant M|z|,$$

$$|w_2(z)-w_1(z)|=\left|\int_0^1 [f(zt,w_1)-f(zt,0)]z\,dt\right|$$
$$\leqslant K|w_1||z|\leqslant KM|z|^2,$$

由数学归纳法易知

$$|w_n(t)-w_{n-1}(z)|\leqslant MK^{n-1}|z|^n=\frac{M}{K}(K|z|)^n.$$

我们这里已经利用了，$f(z,w)$ 满足 Lipschitz 条件这个事实。这是由

$$\left|\frac{f(z,w_1)-f(z,w_2)}{w_1-w_2}\right|$$

在 $R=\{(z,w)|\ |z|\leqslant a,\ |w|\leqslant b\}$ 内是一致有界所得到，而一致有界由 f 的解析性得到。比较的级数对于 $K|z|\leqslant\rho<1$ 是一致收敛的，而 $w_1(z),w_2(z),\cdots\cdots$ 对于 $|z|<c$ 都是解析的，因此

$$w(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[w_n(z)-w_{n-1}(z)]$$

是一列解析函数的一致极限[注]，因此 $w(z)$ 对于 $|z|<c^*=\min[a,b/M]$ 是解析函数，从这里起下面的证明与定理 7.2.1 完全相同，读在可补充这些细节。

第二证明 因为这个方法很重要，我们现在介绍第二个证明，这个证明建立在 Cauchy 的优级数的方法上，参看定理 4.4.6 由于 $f(z,w)$ 是两个复变量的解析函数，它有一个二重幂级数表示式

$$f(z,w)=a_{00}+a_{10}z+a_{01}w+a_{11}zw+\cdots\cdots$$

在 $|z|\leqslant\rho_1<a$，$|w|\leqslant\rho_2<b$ 内成立。我们假设有一个解为

$$w(z)=c_1z+c_2z^2+c_3z+\cdots\cdots.$$

[注] 这里是指 $\sum_{n=1}^{N}[w_n(z)-w_{n-1}(z)]$，当$N\to\infty$时，一致趋于 $w(z)$ —译者注。

形式地将它代入微分方程，则有

$$\begin{aligned}w'(z)&=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots\cdots\\&=a_{00}+a_{10}z+a_{01}(c_1z+c_2z^2+\cdots)\\&\quad+a_{11}(c_1z^2+c_2z^3+\cdots)\\&\quad+a_{20}z^2+a_{02}(c_1z+c_2z^2+\cdots)^2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

使 z 的同次幂的系数相等，则有

$$\begin{aligned}c_1&=a_{00},\\2c_2&=a_{10}+a_{01}c_1,\\3c_3&=a_{01}c_2+a_{11}c_1+a_{20}+a_{02}c_1^2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

因此，我们依次定出 $c_1=a_{00}$，$c_2=(a_{10}+a_{01}a_{00})/2$，$c_3=[a_{01}(a_{10}+a_{01}a_{00})/2+a_{11}a_{00}+a_{20}+a_{02}a_{00}^2]/3$，等等，因此，形式上的级数解唯一地被确定。如果我们能证明这个形式上的幂级数在原点的某个 ε- 邻域内收敛，那么定理就被证明了。

考虑另一个微分方程

$$\frac{dW}{dz}=F(z,W)=A_{00}+A_{01}z+A_{10}W+A_{11}zW+\cdots\cdots$$

这里右端是 $a_{00}+a_{01}z+a_{10}w+\cdots\cdots$ 的一个优级数，这就是说，$|a_{jk}|\leqslant A_{jk}$ 对于一切 j 和 k 成立，如果

$$W=C_1z+C_2z^2+C_3z+\cdots\cdots,$$

那么这个形式级数将被确定如下。

$$\begin{aligned}C_1&=A_{00}\\C_2&=(A_{10}+A_{01}A_{00})/2,\\C_3&=[A_{01}(A_{10}+A_{01}A_{00})/2+A_{11}A_{00}+A_{20}+A_{02}A_{00}^2]/3,\end{aligned}$$

等等，显然这个级数是 $c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$ 的优级数，这是因为

$$|c_1|=|a_{00}|\leqslant A_{00}=C_1,$$

$$|c_2|\leqslant(|a_{10}|+|a_{01}||a_{00}|)/2\leqslant(A_{10}+A_{01}A_{00})/2=C_2,$$

$$|c_3| \leqslant [\,|a_{01}|\,(|a_{10}| + |a_{01}|\,|a_{00}|)/2 + |a_{11}|\,|a_{00}|$$
$$+ |a_{20}| + |a_{02}|\,|a_{00}|^2]/3$$
$$\leqslant [A_{01}(A_{10} + A_{01}A_{00})/2 + A_{11}A_{00} + A_{20} + A_{02}A_{00}^2]/3 = C_3.$$

等等，所以我们要作的事是寻找一个函数$F(z,W)$，它的幂级数表示是$f(z,w)$的一个优级数，并且能够具体地解出微分方程，然后将$c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$与一已知级数$C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots$比较，我们就能建立前一级数的收敛性，同时建立了$w(z)$的存在，并且它在原点的某邻域内解析。现在，由于

$$|a_{jk}| \leqslant M\rho_1^{-j}\rho_2^{-k}$$

这里$M = \max\limits_{(z,w)\in R} |f(z,w)|$，故可取$A_{jk} = M\rho_1^{-j}\rho_2^{-k}$。于是

$$F(z,W) = M\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^j \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{W}{\rho_2}\right)^k$$

$$= \frac{M\rho_1\rho_2}{(\rho_1 - z)(\rho_2 - W)},$$

$$(\rho_2 - W)\frac{dW}{dz} = \frac{M\rho_1\rho_2}{P_1 - z},$$

$$\frac{(W-\rho_2)^2}{2} = M\rho_1\rho_2\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right) + C,$$

这里C是积分常数，由于$W(0)=0$，$C=\rho_2^2/2$，故

$$W(z) = \rho_2 - \rho_2\sqrt{1 + 2M\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right)},$$

这里平方根是取这样的一个分支，它在$z=0$处解析并且在那里取值1。所以$W(z)$是$W' = F(z,W)$的唯一的解析解。它有一个幂级数$C_1z+C_2z^2+\cdots$表示式，且这幂级数在$z=0$的某个ε-邻域内收敛，并且它是$c_1z+c_2z^2+\cdots$的优级数，因此根据比较法则，我们就证明了$c_1z+c_2z^2+\cdots$收敛，并且是$w'=f(z,w)$满足$w(0)=0$唯一的解析解。这就完成证明。

例 7.2.3 证明一阶线性微分方程

$$w' = f(z) + wg(z)$$

满足 $w(0)=0$ 的解存在且唯一，这里 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $|z|<r$ 内是解析的，设 $|z|\leqslant\rho<r$ 则

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots,$$

且 $|a_k|<M\rho^{-k}$，$|b_k|\leqslant M\rho^{-k}$，这里 $M=\max\limits_{|z|=\rho}[\,|f(z)|\,|g(t)|\,]$.
假设有一个级数解 $w(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$，像定理的第二个证明一样，我们可以确定一个唯一的形式幂级数解。这个形式级数的优级数是由微分方程

$$\frac{dW}{dz}=F(z)+WG(z)$$

来确定，这里

$$F(z)=G(z)=M\left[1+\frac{z}{\rho}+\left(\frac{z}{\rho}\right)^2+\cdots\right]=\frac{\rho M}{\rho-z}.$$

于是

$$\frac{dW}{1+W}=\frac{\rho M dz}{\rho-z}$$

$$\operatorname{Log}(1+W)=-\rho M\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)+C.$$

这里 C 是一个积分常数，由于 $w(0)=0$，$C=0$，故

$$w(z)=\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{-\rho M}-1.$$

现在 $W(z)$ 对于 $|z|<\rho$ 是解析的，因此对于一切 $\rho<r$，$W(z)$ 仍为 $w(z)$ 的优级数，所以用它可以证实 $w(z)$ 的形式幂级数在 $|z|<r$ 内收敛。这样我们建立了对于 $|z|<r$ 的唯一解析解的

存在性，这里 r 是从原点到 $f(z)$ 或 $g(z)$的最近的奇异点的距离。

我们还可以讨论形如

$$w_1'(z)=f_1(z,w_1,w_2)$$
$$w_2'(z)=f_2(z,w_1,w_2)$$

满足 $w_1(z_0)=w_1^0$, $w_2(z_0)=w_2^0$ 的系统，这里 f_1 和 f_2 在 $|z|\leqslant a$, $|w_1|\leqslant b$, $|w_2|\leqslant C$ 内为三个复变量的解析函数，讨论这个系统一个方便的方法是采用矢量记号。设W是具有两个分量 $w_1(t)$ 及 $w_2(z)$ 的矢量，f 是具有两个分量 f_1 及 f_2 的矢量。于是，这个系统就成为

$$W'=f(z,W)$$

且以 $W(z_0)=W^0$ 为初始条件。这里 W^0 是有两个分量 W_1^0 与 W_2^0 的矢量，矢量相等的意义是它们对应的分量分别相等。令

$$|W|=\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2}.$$

则

$$\begin{aligned}|U+V|^2&=|u_1+v_1|^2+|u_2+v_2|^2\\&\leqslant|u_1|^2+|u_2|^2+|v_1|^2+|v_2|^2\\&\quad+2|u_1|\,|v_1|+2|u_2|\,|v_2|\\&\leqslant|U|^2+|V|^2+2|U|\,|V|\\&=(|U|+|V|)^2.\end{aligned}$$

于是我们便得到三角不等式 $|U+V|\leqslant|U|+|V|$. 有了这个不等式，我们就能证明存在定理和唯一性定理，这些定理的证明与定理 7.2.3 的第一证明十分相似，我们将不叙述这个证明，而我们将证明关于线性一阶方程系统的如下定理：

定理 7.2.4. 设$f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$, $h_1(z)$, $h_2(z)$ 对于 $|z|<r$ 是解析的，则存在唯一的解 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$满足联立方程

$$w_1' = f_1(z) + w_1 g_1(t) + w_2 h_1(z),$$
$$w_2' = f_2(z) + w_1 g_2(z) + w_2 h_2(z),$$

及 $w_1(0) = w_2(0) = 0$，并且对于 $|z| < r$ 是解析的。

证明 我们应用 Cauchy 优级数法，将给定的函数表示成下面的表示式

$$f_1(z) = a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2 + \cdots$$
$$f_2(z) = a_{20} + a_{21}z + a_{22}z^2 + \cdots$$
$$g_1(z) = b_{10} + b_{11}z + b_{12}z^2 + \cdots$$
$$g_2(z) = b_{20} + b_{21}z + b_{22}z^2 + \cdots$$
$$h_1(z) = c_{10} + c_{11}z + c_{12}z^2 + \cdots$$
$$h_2(z) = c_{20} + c_{21}z + c_{22}z^2 + \cdots$$

这些式子对于 $|z| \leqslant \rho < r$ 成立。且成立下列不等式

$$|a_{ij}| \leqslant M\rho^{-j},\ |b_{ij}| \leqslant M\rho^{-j},\ |c_{ij}| \leqslant M\rho^{-j},$$

$i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2, \cdots$. 我们假设解为

$$w_1(z) = d_{11}z + d_{12}z^2 + d_{13}z^3 + \cdots$$
$$w_2(z) = d_{21}z + d_{22}z^2 + d_{23}z^3 + \cdots$$

于是

$$\begin{aligned}
& d_{11} + 2d_{12}z + 3d_{13}z^2 + \cdots \\
& = a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2 + \cdots \\
& \quad + (d_{11}z + d_{12}z^2 + \cdots)(b_{10} + b_{11}z + b_{12}z^2 + \cdots) \\
& \quad + (d_{21}z + d_{22}z^2 + \cdots)(c_{10} + c_{11}z + c_{12}z^2 + \cdots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_{21} + 2d_{22}z + 3d_{23}z^2 + \cdots \\
& = a_{20} + a_{21}z + a_{22}z^2 \\
& \quad + (d_{11}z + d_{12}z^2 + \cdots)(b_{20} + b_{21}z + b_{22}z^2 + \cdots) \\
& \quad + (d_{21}z + d_{22}z^2 + \cdots)(c_{20} + c_{21}z + c_{22}z^2 + \cdots).
\end{aligned}$$

使 z 的同次幂系数相等，我们有

$$d_{11} = a_{10} \qquad d_{21} = a_{20}$$
$$2d_{12} = a_{11} + d_{11}b_{10} + d_{21}c_{10} \qquad 2d_{22} = a_{21} + d_{11}b_{20} + d_{21}c_{20}$$

$$3d_{13}=a_{12}+d_{11}b_{11}+d_{12}b_{10}+d_{21}c_{11}+d_{22}c_{10}\qquad 3d_{23}=a_{22}+d_{11}b_{21}+d_{12}b_{20}+d_{21}c_{21}+d_{22}c_{20}$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

这些方程决定了唯一的形式幂级数。其次我们考虑有关的方程系统

$$W_1'=F_1(z)+W_1G_1(z)+W_2H_1(z),$$
$$W_2'=F_2(z)+W_1G_2(z)+W_2H_2(z),$$

这里

$$F_1(z)=A_{10}+A_{11}z+A_{12}z^2+\cdots,$$
$$F_2(z)=A_{20}+A_{21}z+A_{22}z^2+\cdots,$$
$$G_1(z)=B_{10}+B_{11}z+B_{12}z^2+\cdots,$$
$$G_2(z)=B_{20}+B_{21}z+B_{22}z^2+\cdots,$$
$$H_1(z)=C_{10}+C_{11}z+C_{12}z^2+\cdots,$$
$$H_2(z)=C_{20}+C_{21}z+C_{22}z^2+\cdots,$$

分别是 f_1,f_2,g_1,g_2,h_1,h_2 的优级数。与上面一样，我们来确定关于 $W_1(z)$ 与 $W_2(z)$ 的唯一的形式幂级数。设

$$W_1(z)=D_{11}z+D_{12}z^2+\cdots$$
$$W_2(z)=D_{21}z+D_{22}z^2+\cdots$$

则

$$D_{11}=A_{10},\qquad D_{21}=A_{20},$$
$$2D_{12}=A_{11}+D_{11}B_{10}+D_{21}C_{10},\qquad 2D_{22}=A_{21}+D_{11}B_{20}+D_{21}C_{20},$$
$$3D_{13}=A_{12}+D_{11}B_{11}+D_{12}B_{10}+D_{21}C_{11}+D_{22}C_{10},\qquad 3D_{23}=A_{22}+D_{11}B_{21}+D_{12}B_{20}+D_{21}C_{21}+D_{22}C_{20},$$
$$\cdots\cdots,\qquad\qquad\cdots\cdots.$$

我们要证明$W_1(z)$与$W_2(z)$分别是$w_1(z)$与$w_2(z)$的优级数。事实上，

$$|d_{11}| = |a_{10}| \leqslant A_{10} = D_{11}, \qquad |d_{21}| = |a_{20}| \leqslant A_{20} = D_{21}$$

$$2|d_{n}| \leqslant |a_{11}| + |a_{10}| |b_{10}| + |a_{20}| \cdot |c_{10}| \leqslant A_{11} + A_{10}B_{10} + A_{20}C_{10} = 2D_{12}, \quad \cdots\cdots,$$

$$2|d_{22}| \leqslant |a_{21}| + |a_{10}| |b_{20}| + |a_{20}| |c_{20}| \leqslant A_{21} + A_{10}B_{20} + A_{20}C_{20} = 2D_{22}, \quad \cdots\cdots.$$

我们令

$$F_1(z) = F_2(z) = G_1(z) = G_2(z) = H_1(z) = H_2(z) = M\left[1 + \frac{z}{\rho} + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{\rho M}{\rho - z}.$$

则

$$W_1' = \frac{\rho M}{\rho - z}(1 + W_1 + W_2),$$

$$W_2' = \frac{\rho M}{\rho - z}(1 + W_1 + W_2),$$

$$W_1' = W_2',$$

$$W_1' + W_2' = \frac{2\rho M}{\rho - z}(1 + W_1 + W_2).$$

所以，$W_1 = W_2 + C$，这里C是积分常数。然而因为$W_1(0) = 0$，$W_2(0) = 0$，故$C = 0$. 因此

$$W_1' = \frac{\rho M}{\rho - z}(1 + 2W_1),$$

$$\frac{dW_1}{1 + 2W_1} = \frac{\rho M}{\rho - z} dz,$$

$$\operatorname{Log}(1 + 2W_1) = -2\rho M \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) + C',$$

这里 C' 是积分常数，但 $W_1(0)=0$. 故 $C'=0$. 所以

$$W_1(z)=W_2(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{-2\rho M}-\frac{1}{2}.$$

这些函数对于 $|z|<\rho$ 是解析的。由比较法知，$w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 在 $|z|<r$ 内有收敛的幂级数展开式，这是因为上面的分析对于每个 $0<\rho<r$ 都成立的缘故。这就完成定理的证明。

例 7.2.4 设 $f(z)$, $g(z)$ 与 $h(z)$ 对于 $|z|<r$ 是解析的。证明对于 $|z|<r$，方程

$$w''+f(z)w'+g(z)w=h(z)$$

满足 $w(0)=a$, $w'(0)=b$ 有唯一的解析解。设 $w_1(z)=w(z)$, $w_2(z)=w'(z)$, $w_1(0)=a$, $w_2(0)=b$. 我们有

$$w_1'=w_2',$$
$$w_2'=h(z)-f(z)w_2-g(z)w_1.$$

这个系统是线性的，我们予先作变量替换 $w_1-a\to w_1, w_2-b\to w_2$ 后，由定理 7.2.4 便可得到所求的结果。

习 题 7.2

1. 考虑常微分方程

$$\ddot{y}(t)=-f(t),$$

这里 f 当 $t\geqslant 0$ 时是 t 的一个连续实值函数。证明 y 满足微分方程和初始条件 $y(0)=a$, $\dot{y}(0)=b$ 的充要条件是：

$$y=a+bt+\int_0^t (x-t)f(x)dx.$$

并证明

$$G(x,t)=x-t, \quad 0\leqslant x\leqslant t$$

满足如下条件：$G_x=1, 0<x<t$ 与 $G(t,t)=0$, $G(t,t)$ 称为这个初始值问题的 Green 函数。

2. 考虑下面初始值问题

$$\ddot{y}(t)+y(t)=0,$$
$$y(0)=a,\ \dot{y}(0)=b.$$

证明 y 是这个问题的解的充要条件是满足 Volterra 积分方程

$$y(t)=a+bt+\int_0^t G(x,t)y(x)dx.$$

这里 G 是问题 1 的 Green 函数。

3. 利用定理 7.2.1 的证明中的迭代法，证明问题 2 的初始值问题存在一个唯一的解。

4. 将问题 1—3 推广到更一般的初始值问题

$$\ddot{y}+c_1\dot{y}+c_2y=-f(t)$$
$$y(0)=a,\ \dot{y}(0)=b.$$

这里 c_1 与 c_2 是常数，$f(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 是连续的。提示：求出满足 $G_x-c_1G=1$ 与 $G(t,t)=0$ 的 Green 函数 $G(x,t)$.

7.3 二阶线性微分方程在一寻常点附近的解

最常见的二级线性微分方程是下列形式

$$a_2(z)w''+a_1(z)w'+a_0(z)w=b(z),$$

我们将要考虑这个方程满足 $w(z_0)=w_0$, $w'(z_0)=w_0'$ 的解法问题，这里假设函数 a_0,a_1,a_2 及 b 在某一园域 $|z-z_0|<R$ 内是解析的。不失一般性，我们假设 $z_0=0$，如果不这样，取变量替换 $z-z_0\to z$ 便可做到这点。

如果 $a_2(0)\neq 0$，我们称原点是微分方程的一个寻常点。因为 $a_2(z)$ 在原点是解析的，所以存在原点的 ε-邻域，在此邻域内处处 $a_2(z)\neq 0$. 我们假设对于 $|z|<R$, $a_2(z)\neq 0$，于是可将方程写为

$$w'+p(z)w''+q(z)w=r(z),$$

这里 $p(z)=a_1(z)/a_2(z)$，$q(z)=a_0(z)/a_2(z)$ 及 $r(z)=b(z)/a_2(z)$ 对于 $|z|<R$ 内是解析的。

定义 7.3.1. 我们说两个函数 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 在 $|z|<R$ 内是线性无关的，是指不存在两个不全为零的常数 c_1 与 c_2 使得 $c_1w_1(z)+c_2w_2(z)\equiv 0$，对 $|z|<R$ 成立，如果 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 不是线性无关的，则称它们是线性相关的。

如果 w_1 与 w_2 是线性相关，则它们成比例，也就是说，或者 $w_1\equiv kw_2$ 或者 $w_2\equiv kw_1$ 成立，这是因为如果 $c_1\neq 0$ 则有 $w_1=(-c_2/c_1)w_2$ 或者 $c_2\neq 0$ 则 $w_2=(-c_1/c_2)w_1$。如果 $w_1\equiv 0$ 则 w_1 与任何其他函数都线性相关，因为取 $c_1=1$，$c_2=0$ 就有 $c_1w_1+c_2w_2\equiv 0$. 如果 w_1 与 w_2 是解的且存在一组不全为零的常数 c_1 与 c_2 使得对于含于 $|z|<R$ 内的一列有极限点的点列上有 $c_1w_1+c_2w_2=0$，那么，w_1 与 w_2 线性相关。这是因为 $c_1w_1+c_2w_2$ 在 $|z|<R$ 内是解的，且在给定区域内在具有极限点的一列点列上等于零，因此它在该域内恒等于零。

定义 7.3.2. 设 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，则函数 $W(z)=w_1w_1'-w_2w_2'$ 称做 w_1 与 w_2 的 Wronskian 行列式。

定理 7.3.1. 设 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，则 w_1 与 w_2 是线性无关的充要条件是：w_1 与 w_2 的 Wronskian 行列式在某一点 z_0 不为零，其中 $|z_0|<R$。。

证明 假设 w_1 与 w_2 线性无关，则不存在两个不全为零的常数 c_1 与 c_2 使得

$$c_1w_1+c_2w_2\equiv 0.$$

换句话说，$c_1w_1+c_2w_2\equiv 0$。意味着 $c_1=c_2=0$. 因此如果 $c_1w_1+c_2w_2\equiv 0$，则 $c_1w_1'+c_2w_2'\equiv 0$ 设 $|z_0|<R$，于是

$$c_1w_1(z_0)+c_2w_2(z_0)=0,$$

$$c_1w_1'(z_0)+c_2w_2'(z_0)=0.$$

只有平凡解 $c_1=c_2=0$，这表示行列式

$$\begin{vmatrix} w_1(z_0) & w_2(z_0) \\ w_1'(z_0) & w_2'(z_0) \end{vmatrix} = w_1(z_0)w_2'(z_0) - w_2(z_0)w_1'(z_0)$$

$$= W(z_0) \neq 0.$$

反之，如果 w_1 与 w_2 是线性相关的，那么或者 $w_1=k\omega_2$ 或 $\omega_2=k\omega_1$ 成立，不管那种情形都有 $W(z)\equiv 0$.

注意：Wronskian 行列式在一点等于零，不能得出 w_1 与 w_2 线性相关的结论，例如 $w_1=z^2$，$w_2=z^5$ 是线性无关的，但它们的 Wronskian 行列式在原点等于零。另一方面如果 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 的 Wronskian 行列式在一组点列上等于零，而这点列的极限点含在 $|z|<R$ 内，这意味着 Wronskian 行列式在 $|z|<$ 内恒等于零。因此 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 线性相关。

定理 7.3.2. 假设 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 是

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

的解析解。这里 $p(z)$ 与 $q(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，则 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 是线无关的充要条件：它们的 Wronskian 行列式在 $|z|<R$ 内恒不为零。

证明 因为 w_1 与 w_2 满足微分方程，我们有

$$w_1''+p(z)w_1'+q(z)w_1=0,$$

$$w_2''+p(z)w_2'+q(z)w_2=0.$$

第一方程乘 w_2，第二方程乘 w_1，然后相减得

$$w_1w_2''-w_2w_1''+p(z)(w_1w_2'-w_2w_1')=0,$$

$$\frac{d}{dz}(w_1w_2'-w_2w_1')+p(z)(w_1w_2'-w_2w_1')=0,$$

$$W'+p(z)W=0.$$

设 $|z_0|<R$，则 $W'+p(z)W=0$ 有一个唯一的解满足 $W(z_0)=W_0$，在 $|z-z_0|<R-|z_0|$ 内，这个解是

$$W(z)=W_0\exp\left[-\int_{z_0}^{z} p(\zeta)d\zeta\right],$$

这里积分路径取作直线段。显然，如果$W(z_0)=0$则在$|z-z_0|<R-|z_0|$内$w(z)\equiv 0$，因而在$|z|<R$上也为零。因为函数$\exp\left[-\int_{z_0}^{z} p(\zeta)d\zeta\right]$恒不为零，并由解析延拓，在$|z|<R$内$w(z)$恒不为零。倘若$w_1$与$w_2$线性无关，则至少存在一点$z_0$，$|z_0|<R$使得$w(z_0)\neq 0$，从而，$W(z)$对于$|z|<R$恒不为零。反之，如果$W(z_0)=0$，则$W(z)\equiv 0$，这就证明了$w_1$与$w_2$是线性相关的。定理证明完毕。

现在我们再回到

$$w''+p(z)w'+q(z)w=r(z)$$

在寻常点邻近的解，这个寻常点假设是原点，由例 7.2.4 知这个方程对于$|z|<R$有一个唯一的解满足$w(0)=a$及$w'(0)=b$。如果a与b视作参量，则我们得到一个含有两参量的解族。另外一个含两个参量的解族是

$$w(z)=c_1w_1(z)+c_2w_2(z)+u(z),$$

这里w_1与w_2是齐次方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的两个线性无关的解，u是原方程的任一个特解。我们可以证明从这些解族里恒可以选择一个满足$w(0)=a$与$w'(0)=b$的解。首先我们证明，对常数c_1与c_2，都有一个解，显然，对于任何c_1与c_2有

$$\begin{aligned}w''+pw'+qw&=c_1[w_1''+pw_1'+qw_1]+\\&+c_2[w_2''+pw_2'+qw_2]+\\&+u''+pu'+qu=r(z).\end{aligned}$$

最后，由于$W(0)=w_1(0)w_2'(0)-w_2(0)w_1'(0)\neq 0$，所以由

$$\begin{aligned}w(0)&=c_1w_1(0)+c_2w_2(0)+u(0)=a,\\w'(0)&=c_1w_1'(0)+c_2w_2'(0)+u'(0)=b,\end{aligned}$$

恒可解出唯一的 c_1 与 c_1。这是方程组理论的熟知的一个定理。我们把这个结果概括为下面定理。

定理 7.3.3. 设 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 是线性齐次微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

对于 $|z| < R$ 的两个线性无关的解，这里 $p(z)$ 与 $q(z)$ 是解析的，令 $u(t)$ 是非齐次方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = r(z)$$

的一个特解。这里 $r(z)$ 对于 $|z| < R$ 是解析的，则 $c_1w_1 + c_2w_2 + u$ 是一般解，其中 c_1 与 c_2 是任意常数，且这个解族包含了 $w'' + p(z)w' + q(z)w = r(z)$ 满足 $w(0) = a$，$w'(0) = b$ 的唯一的解（对于 $|z| < R$）。

因此对于二阶线性微分方程在一个寻常点附近的解的问题就归结为求 w_1，w_2 及 u；考虑齐次方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

从定理 7.2.4 我们已经知道它有一幂级数解满足 $w(0) = c_0$，$w'(0) = c_1$ 且在 $|z| < R$ 内收敛。为了确定这个幂级数，我们假设

$$w(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots,$$
$$w'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots,$$
$$w''(z) = 2c_2 + 6c_3z + 12c_4z^2 + \cdots.$$

设

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots,$$
$$q(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots,$$

在 $|z| < R$ 内成立，将这些代入方程，我们有

$$(2c_2 + 6c_3z + 12c_4z^2 + \cdots)$$
$$+ (a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots)(c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots)$$
$$+ (b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots)(c_0 + c_1z + c_2z^2\cdots) = 0.$$

使 z 的各次幂的系数等于零，得

$$2c_2+a_0c_1+b_0c_0=0,$$
$$6c_3+2a_0c_2+a_1c_1+b_1c_0+b_0c_1=0,$$
$$12c_4+a_2c_1+2a_1c_2+3a_0c_3+b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=0,$$
$$c_2=-(a_0c_1+b_0c_0)/2,$$
$$c_3=-(2a_0c_2+a_1c_1+b_1c_0+b_0c_1)/6,$$
$$c_4=-(a_2c_1+2a_1c_2+3a_0c_3+b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0)/12,$$

等等。因而这些系数是唯一递推地被确定出来，设 $w_1(0)=1$ 及 $w_1'(0)=0$，则

$$w_1(z)=1-(b_0/2)z^2+\frac{a_0b_0-b_1}{6}z^3+\cdots,$$

设 $w_2(0)=0$ 及 $w_2'(0)=1$，则

$$w_2(z)=z-\frac{a_0}{2}z^2+\frac{a_0^2-a_1-b_0}{6}z^3+\cdots,$$

此时 w_1 与 w_2 在原点的 Wronskian 行列式是

$$w_1(0)w_2'(0)-w_2(0)w_1'(0)=1 .$$

所以 w_1 与 w_2 是线性无关的。

为了确定特解$u(z)$，我们应用一个方法，叫常数变量法。假设解 $u(z)$ 的形式为

$$u(z)=A(z)w_1(z)+B(z)w_2(z) ,$$

则 $$u'(z)=A(z)w_1'+B(z)w_2'+A'w_1(z)+B'w_2(z) .$$

这里我们设 $A'w_1+B'w_2=0$，再微分上式，得

$$u''(z)=A(z)w_1''+B(z)w_2''+A'w_1'+B'w_2'$$

代入微分方程中去，我们有

$$A'w_1'+B'w_2'+A(z)[w_1''+pw_1'+qw_1]$$
$$+B(z)[w_2''+pw_2'+qw_2]=r(z).$$

因此，我们必须解下列系统中的 A' 与 B'，

$$A'w_1+B'w_2=0,$$
$$A'w_1'+B'w_2'=r(z)$$

由此解 A' 与 B'，我们有

$$A'=-r(z)w_2(z)/W(z),\qquad B'=r(z)w_1(z)/W(z),$$

这里$W(z)$ 是 w_1 和 w_2 的 Wronskian 行列式．若 $|z|<R$，我们可以沿着从原点到 z 的直线积分，有

$$A(z)=-\int_0^z \frac{r(\zeta)w_2(\zeta)}{W(\zeta)}d\zeta,$$

$$B(z)=\int_0^z \frac{r(\zeta)w_1(\zeta)}{W(\zeta)}d\zeta,$$

$$u(z)=\int_0^z r(\zeta)G(z,\zeta)d\zeta.$$

这里 $G(z,\zeta)=[w_1(\zeta)w_2(z)-w_1(z)w_2(\zeta)]/W(\zeta)$ 对于 $|z|<R$ 和 $|\zeta|<R$ 是 z 与 ζ 的一个解析函数，$G(z,\zeta)$是伴随于给出的微分方程的 Green 函数。

习　题 7.3

1．在方程式

$$w''+p(z)w'+q(z)w=r(z)$$

中取变换 $z=1/\zeta$，叙述微分方程在无穷远处有一正常点的判别条件。证明，在这些情况下，代换

$$w(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$$

将决定一级数解，对于 $|z|$ 充分大的值成立。

2．在 $|z|<1$ 内，求方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$$

的两个线性无关的解。当 n 是非负的整数时有一解是多项式，试证明之。

3．试求

$$w''-z^2w'+(2n+1)w=0$$

两个线性无关的解，这里 n 是非负的整数．当 $n=0$ 时，证明 $e^{-z^2/2}$ 是一个解。作变换 $w=e^{-z^2/2}u(z)$，证明由此得到的 u 的方程式有多项式的解。

4． 求 $w''+zw'+2w=z$ 的一般解。

5． 设 $p(z)$ 在非延拓平面上是半纯函数，令 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 是 $w''+pw'+qw=0$ 的在 $|z-z_0|<R$ 内的线性无关的解，$|z-z_0|<R$ 内不包含 p 或 q 的任何奇点。令 w_1 与 w_2 围绕一条单闭曲线 c 解析延拓到 w_1 及 w_2。证明 $W(w_1,w_2)=W(w_1,w_2)e^{-2\pi is}$，其中 s 是 p 在 c 内极点处留数的和。

7.4 二阶线性微分方程在一正则奇点附近的解

回忆一下，最一般二阶线性常微分方程有如下形式

$$a_2(z)w''+c_1(z)w'+c_0(z)w=b(z),$$

这里我们再次假设对于 $|z-z_0|<R$，c_0,c_1,a_2 与 b 都是解析的．在前一节，我们假设 $a_2(z)$ 在这区域内恒不为零。但经常迂到这样一种情形。即 $a_2(z)$ 在 z_0 处有二阶零点，$a_1(z)$ 在 z_0 处有一阶零点。在这种情况下，我们称 z_0 是微分方程的正则奇点。不妨再设 $z_0=0$，因此微分方程可以写成如下形式

$$z^2b_2(z)w''+zb_1(z)w'+a_0(z)w=b(z)$$

或

$$z^2w''+zp(z)w'+q(z)w=r(z),$$

这里 $p(z)=b_1(z)/b_2(z)$，$q(z)=a_0(z)/b_2(z)$，及 $r(z)=b(z)/b_2(z)$，它们对 $|z|<R$ 是解析的。我们将要证明这个微分方程的每一个解在环形域 $0<|z|<R$ 内，可以写成 $z^m u(z)$ 的形式

$$z^m[u(z)\operatorname{Log} z+z^n v(z)],$$

这里 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $|z|<R$ 内是解析的，而 n 是一整数。这个条件也为 $z=0$ 是微分方程的正则奇点的充条件[注]我们不证明这点，相反我们将应用这个在应用中常出现的特殊情形的一些有关论断。

我们首先考虑齐次微分方程

$$z^2w''+zp(z)w''+q(z)w=0$$

这里 $p(z)$ 与 $q(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，与之密切相关是 Eeler 微分方程

$$z^2w''+zp_0w'+q_0w=0,$$

这里 p_0 与 q_0 是常数，众所周知，假设 $w=z^m$ 就可以得一个解。代入方程，如果 m 是特征方程

$$m(m-1)+p_0m+q_0=0$$

的根，则得 $[m(m-1)+p_0m+q_0]z^m=0$。一般这个特征方程有两个复根 m_1 与 m_2。令 $p(0)=p_0$ 与 $q(0)=q_0$。因为对于充分小的 $|z|$，$p(z)$ 与 $q(z)$ 分别靠近 p_0 与 q_0，所以有理由假设 $z^2w''+zpw'+qw=0$ 的一个解，对于充分小的 $|z|$ 是靠近 z^{m_1} 或 z^{m_2}。由于这些缘故，我们试一试如下形式的一个解

$$w(z)=z^{m_1}(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)=z^{m_1}u(z),$$

这里 $Re(m_1)\geqslant Re(m_2)$。将上式代入微分方程我们有

$$z^{m_1+2}u''+[2m_1+p(z)]z^{m_1+1}u'+[m_1(m_1-1)+m_1p(z)+q(t)]z^{m_1}u=0.$$函数 $m_1(m_1-1)+m_1p(z)+q(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，而且在 $z=0$ 处为零，这是因为 $m_1(m_1-1)+m_1p_0+q_0=0$。因此微分方程能写成

$$zu''+f(z)u'+g(z)u=0$$

这里 $f(z)$ 与 $g(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，并且

[注] B.A.Fuchs 与 V.I.Lerin，复变函数及其应用II。第114页。Reading Mass：Addison-Wesley Publishing Company，Inc.出版1961年。

$f(0)=2m_1+p_0=2m_1+(1-m_1-m_2)=m_1-m_2+1\neq 0$，因而 $Re[f(0)]=Re(m_1-m_2+1)\geqslant 1$，我们将要证明这个方程存在一唯一的解，满足 $u(0)=c_0$，而且对于 $|z|<R$ 是解析的。

定理 7.4.1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的，且 $Re[f(0)]\geqslant 1$。则微分方程 $zu''+f(z)u'+g(z)u=0$ 有一唯一解满足 $u(0)=c$，而且这个解对于 $|z|<R$ 是解析的。

证明 假设一幂级数

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

$$u'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k z^{k-1},$$

$$u''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k z^{k-2},$$

现在假设对于 $|z|<R$，$f(z)$ 与 $g(z)$ 有下列幂级数表示。

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\qquad g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\,.$$

将这些幂级数代入微分方程，则有

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k z^{k-1}+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}kc_k z^{k-1}\Big)$$
$$+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k\Big)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+a_0)c_{k+1}z^k$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}(k+1-j)a_j c_{k+1-j}z^k$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}b_j c_{k-j}z^k=0.$$

使 z 的各次幂的系数等于零，则有

$$a_0c_1+b_0c_0=0,$$

$$2(1+a_0)c_2+a_1c_1+b_0c_1+b_1c_0=0,$$

$$3(2+a_0)c_3+2a_1c_2+a_2c_1+b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=0,$$

……………………………………………………

$$(k+1)(k+c_0)c_{k+1}+\sum_{j=1}^{k+1}(k+1-j)a_jc_{k+1-j}$$

$$+\sum_{j=0}^{k}b_jc_{k-j}=0.$$

所以，微分方程确定一个唯一的形式幂级数。如果我们能证明这个形式幂级数在 $|z|<R$ 内收敛，那么，我们就证明了在 $|z|<R$ 内存在唯一的解析解。

设 $|z|\leqslant\rho<R$，则 $|a_k|\leqslant A\rho^{-k}$，$|b_k|\leqslant B\rho^{-k}=(B\rho)\rho^{-k-1}$，其中 $A=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$，$B=\max\limits_{|z|=\rho}|g(z)|$，记 $M=\max[A,B\rho]$，则

$$|a_k|\leqslant M\rho^{-k},\quad |b_k|\leqslant M\rho^{-k-1}.$$

设 $|c_0|=C_0$，则 $|a_0|\ |c_1|\leqslant M\rho^{-1}C_0$。设 $|a_0|C_0=M\rho^{-1}C_0$ 则显然 $|c_1|<C_1$，此外

$$2|1+a_0|\ |c_1|\leqslant|a_0|\ |c_1|+|b_0|\ |c_1|+|b_1|\ |c_0|$$
$$\leqslant 2M\rho^{-1}C_1+M\rho^{-2}C_0$$

设 $2|1+a_0|C_2=2M\rho^{-1}C_1+M\rho^{-2}C_0$，则 $|c_2|\leqslant C_2$，从而

$$3|2+c_0|\ |a_3|\leqslant 2|c_1|\ |c_2|+|b_0|\ |c_2|+|a_2|\ |c_1|+$$
$$+|b_1|\ |c_1|+|b_2|\ |c_0|$$
$$\leqslant 3M\rho^{-1}C_2+2M\rho^{-2}C_1+M\rho^{-3}C_0$$

设 $3|2+c_0|C_3=3M\rho^{-1}C_2+M\rho^{-2}C_1+M\rho^{3}C_0$

在这种情况下 $|c_3|\leqslant C_3$。于是我们作出的形式幂级数的优级数 $C_0+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots$，且有 $|c_k|\leqslant C_k$。最后，我们必须证明，优级数收敛，这些 C_k 满足下列递推关系。

$$k|k-1+c_0|C_k=kM\rho^{-1}C_{k-1}+(k-1)M\rho^{-2}C_{k-2}$$
$$+\cdots+M\rho^{-k}C_0.$$

因此显然

$$\rho(k+1)\,|k+a_0|\,C_{k-1}=(k+1)MC_k+kM\rho^{-1}C_{k-1}$$
$$+\cdots+M\rho^{-k}C_0,$$

相减我们有

$$\rho(k+1)\,|k+a_0|\,C_{k+1}-k\,|k-1+a_0|\,C_k=(k+1)MC_k.$$

或

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}=\frac{k\,|k-1+a_0|+(k+1)M}{\rho(k+1)\,|k+a_0|}.$$

由比值判别法

$$\lim_{k\to\infty}\frac{C_{k+1}\,|z|}{C_k}=\frac{|z|}{\rho}<1,$$

知优级数对于 $|z|<\rho$ 收敛。这就是说

$$u(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

对于 $|z|<\rho$ 收敛。由于 ρ 是小于 R 的任一正数，故级数对于 $|z|<R$ 收敛。这就完成了证明。

对于这个结果我们首先发现：我们并未得到一个唯一解。因为我们只给定初始值 $u(0)=c_0$ 但沒有导数值 $u'(0)$，而在例 7.2.4 中（那里原点是一个正常点），为了得到唯一的解，我们必须规定解的初始值和解的导数。所以我们认为方程

$$z^2w''+zp(z)w'+q(z)w=0$$

在原点附近必定还有一个解，作变换

$$w=w_1(z)v(z)$$

这里 $w_1(z)=z^{m_1}\,u(z)$，在 $0<|z|<R$ 内滿足微分方程。于是

$$w'=w_1'v+w_1v',$$
$$w''=w_1''v+2w_1'v'+w_1v'',$$
$$(z^2w_1''+zpw_1'+qw_1)v+z^2w_1v''+(2z^2w_1'+zpw_1)v'=0,$$
$$v''+\left[\frac{2w_1'}{w_1}+\frac{p(z)}{z}\right]v'=0,$$

其中 $0<|z|<R$. 由此有

$$\frac{v''}{v'}=-\frac{2w_1'}{w_1}-\frac{p(z)}{z},$$

$$\operatorname{Log} v'=-2\operatorname{Log} w_1-\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

这里 z_0 是这环形域内某一固定点，而积分路径位于这环形域内，取指数函数有

$$v'=\frac{1}{w_1^2}\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}\right]d\zeta$$

$$w=w_1v=w_1(z)\int_{z_0}^{z}\frac{1}{w_1^2}\exp\left[-\int_{z_0}^{\zeta}\frac{p(t)}{t}dt\right]d\zeta.$$

让我们限制 $\arg z$ 如下：即 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，为此割开环形域。由于 z^{m_1} 第一个解 $w_1(z)$ 可能是多值的，但若我们选定 w_1 的一个分枝，那么

$$w_2=w_1\int_{z_0}^{z}\frac{1}{w_1^2}\exp\left[-\int_{z_0}^{\zeta}\frac{p(t)}{t}dt\right]d\zeta$$

在这割开的环形域内是解析的。而且 w_1 与 w_2 在割开的环形域内是线性无关的，这是因为

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}=w_1^2v'=\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right]$$

恒不为零的缘故。

让我们更仔细地考虑一下 w_2，设

$$p(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\cdots$$

则

$$\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta=p_0\operatorname{Log} z+p_1z+p_2\frac{z^2}{2}+\cdots+C.$$

这里 C 是一个积分常数，依赖于 z_0 和 $\operatorname{Log} z$ 的分枝的选择。记

$p(z)=c+p_1z+p_2\frac{z^2}{2}+\cdots$，那么

$$\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right]=z^{-p_0}e^{-p(z)}$$

$$=z^{-p_0}(\alpha_0+\alpha_1z+\alpha z^2+\cdots),$$

$$\frac{1}{w_1^2}\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right]$$

$$=z^{-p_0-2m_1}\frac{1}{u^2}(\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\cdots)$$

$$=z^{-2m_1-p_0}(\beta_0+\beta_1z+\beta_2z^2+\cdots).$$

因特徵方程是 $m^2-(1-p_0)m+q_0=0$，从而 $m_1+m_2=1-p_0$因此 $2m_1+p_0=m_1-m_2+1$，

$$w_2(z)=w_1\int_{z_0}^{z}t^{-m_1+m_2-1}(\beta_0+\beta_1t+\beta_2t^2+\cdots)dt.$$

现在让我们分别考虑三种情况：

情形 1： $m_1=m_2$

在这种情况下，

$$w_2(z)=z^{m_1}u(z)\int_{z_0}^{z}(\beta_0t^{-1}+\beta_1+\beta_2t+\cdots)dt$$

$$=z^{m_1}u(z)[\beta_0\log z+B(z)],$$

这里 $u(z)$ 与 $B(z)$ 对于 $|z|<R$ 是解析的。如果 $w_1(z)$ 不恒等于零，由于 $\beta_0=\alpha_0/c_0$ 与 $\alpha_0=e^{-p(0)}\neq0$ 及 $c_0\neq0$，因此对数项决不会消失。

情形 2： $m_1-m_2=n$ 是一正整数

在这情况下，

$$w_2(z)=z^{m_1}u(z)\int_{z_0}^{z}(\beta_0 t^{-n-1}+\beta_1 t^{-n}+\beta_2 t^{-n+1}+\cdots+\beta_n t^{-1}+\cdots)dt,$$

$$=z^{m_1}u(z)\left[\frac{\beta_0 z^{-n}}{-n}+\frac{\beta_1 z^{-n+1}}{-n+1}+\cdots+\beta_n\log z+A(z)\right],$$

这里 $A(z)$ 对 $|z|<R$是解析的，在这种情况下，如果 $\beta_n=0$，对数项是可能消失，如果是这种情况，则解的形式变为 $w_2=z^{m_2}\phi(z)$，这里 ϕ 对于 $|z|<R$ 是解析的。这样提示我们，在某些情况下，正如前面用替换 $w=z^{m_1}u(z)$ 得到上面的解一样。替换 $w=z^{m_2}\phi(z)$，将导致 $\phi(z)$的幂级数的确定，

情形 3： m_1-m_2 不是一个整数

在这种情况下，

$$w_2(z)=z^{m_1}u(z)\int_{z_0}^{z}(\beta_0 t^{-m_1+m_2-1}+\beta_1 t^{-m_1+m_2}+\cdots)dt$$

$$=z^{m_1}u(z)\left(\frac{\beta_0 z^{-m_1+m_2}}{-m_1+m_2}+\frac{\beta_1 z^{-m_1+m_2+1}}{-m_1+m_2+1}+\cdots+C\right),$$

这里 c 是一个积分常数，于是

$$w_2(z)=z^{m_2}\psi(z),$$

这里 $\psi(z)$ 对于 $|z|<R$是解析的，这就告诉我们，当 m_1-m_2 不是一个整数时，用替换 $w=z^{m_2}\psi(z)$ 我们总可得到 $\psi(z)$ 的一个幂级数。

现在我们转到非齐次微分方程

$$z^2w''+zp(z)w'+q(z)w=r(z)$$

的解，这里 p,q,r 在 $|z|<R$ 内是解析的，为了确定起见，我

们寻求园域$\left|z-\frac{R}{2}\right|<\frac{R}{2}$内的一般解。设$w_1(z)$与$w_2(z)$是上面得到的齐次方程的特解，这里已经选好函数的确定分枝，而这分枝在园域内是解析的，我们已经知道w_1与w_2是线性无关的，因此 Wronskian 行列式

$$W(w_1,w_2)=w_1w_2'-w_1'w_2$$
$$=\left[w_1\left(\frac{R}{2}\right)w_2'\left(\frac{R}{2}\right)-w_1'\left(\frac{R}{2}\right)w_2\left(\frac{R}{2}\right)\right]\times$$
$$\exp\left[-\int_{\frac{R}{2}}^{z}\frac{p(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right]$$

是解析的，且在园域内恒不为零，现在我们寻求非齐次方程的一特解，这特解具有下面的形式：

$$\tilde{w}=A(z)w_1+B(z)w_2.$$

于是

$$\tilde{w}'=Aw_1'+Bw_2'+A'w_1+B'w_2,$$

置$A'w_1+B'w_2=0$，再微分有

$$\tilde{w}''=Aw_1''+Bw_2''+A'w_1'+B'w_2',$$

于是代入方程有

$$z^2(A'w_1'+B'w_2')=r(z).$$

解出A'与B'，则有

$$A'=\frac{-w_2r}{z^2W(w_1,w_2)},\quad B'=\frac{w_1r}{z^2W(w_1,w_2)},$$
$$\tilde{w}=\int_{\frac{R}{2}}^{z}r(\zeta)G(z,\zeta)d\zeta,$$

这里

$$G(z,\zeta)=\frac{w_1(\zeta)w_2(z)-w_1(z)w_2(\zeta)}{\zeta^2W(w_1,w_2)}.$$

$G(z,\zeta)$ 就是我们的问题的 Green 函数，它在圆域内是 z 和 ζ 的解析函数。

我们知道，如果给定初始条件 $w\left(\frac{R}{2}\right)=w_0$ 及 $w'\left(\frac{R}{2}\right)=w_0'$ 则在园域内微分方程具有满足给定条件的唯一解，这个唯一解总可以从一般解

$$w(z)=c_1w_1+c_2w_2+\tilde{w}$$

中去找，这只需解方程组

$$w_0=c_1w_1\left(\frac{R}{2}\right)+c_2w_2\left(\frac{R}{2}\right)+\tilde{w}\left(\frac{R}{2}\right),$$

$$w_0'=c_1w_1'\left(\frac{R}{2}\right)+c_2w_2'\left(\frac{R}{2}\right)+\tilde{w}'\left(\frac{R}{2}\right),$$

求出 c_1 与 c_2，这方程组恒有唯一的解，这是因为 w_1 与 w_2 是线性无关的。

习　　题 7.4

1. 在方程

$$z^2w''(z)+zp(z)w'(z)+q(z)w(z)=r(z)$$

中作替换 $z=\frac{1}{\zeta}$，试叙述微分方程在 $z=\infty(\zeta=0)$ 有一正则奇点的判别法则。

2. 将下列形式

$$w=z^m(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)$$

是级数代入微分方程 $z^2w''+zp(z)w'+q(z)w=0$，证明，倘若 m 是特征方程

$$m(m-1)+p(0)m+q(0)=0$$

的根，且两根之差不是一个整数，则可以确定两个形式解。

3. 证明：仅有一个奇点，即在无穷远点处有一正则奇点的唯一的二阶线性齐次微分方程是 $w''=0$。

4. 证明：有两个奇点，即在原点与无穷远点处有正则奇点的唯一的二阶线性齐次微分方程是 Euler 方程。证明：倘若 m_1 及 m_2 在原点处是特征方程的根，而 n_1 与 n_2 在无穷远点处是特征方程的根，则 $m_1+m_2+n_1+n_2=0$ 及 $m_1m_2=n_1n_2$。

5. 证明：倘若有三个奇点，即在原点，1 及无穷远点处有正则奇点唯一的二阶线性齐次微分方程是下面形式

$$w''+\left(\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z-1}\right)w'+\left[\frac{b_0}{z^2}+\frac{b_1}{(z-1)^2}+c_0\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\right]w=0.$$

如果 α_1 与 α_2，β_1 与 β_2，γ_1 与 γ_2 是特征方程分别在 $0,1,\infty$ 的根。证明：$a_0=1-\alpha_1-\alpha_2$，$a_1=1-\beta_1-\beta_2$，$b_0=\alpha_1\alpha_2$，$b_1=\beta_1\beta_2$ 及 $c_0=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2$ 因而 $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+r_1+\gamma_2=1$.

6. 参照问题 5，倘若我们令 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=1-\gamma$，$\beta_1=0$，$\beta_2=\gamma-\alpha-\beta$，$\gamma_1=\alpha$，$\gamma_2=\beta$ 则方程变为

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)]w'-\alpha\beta w=0.$$

如果 r 不是整数，证明这方程在 $0<|z|<1$ 内具有解

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)}\frac{z^k}{k!},$$

及 $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma,z)$. $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 称为超越几何函数。

7. 证明： Legendre 方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$$

在 $+1,-1$，及 ∞ 点处有正则奇点，其特征方程的根分别为0，0；

0,0; 及 $n+1, -n$.

8. 证明伴随 Legendre 方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

在$+1$，-1，及∞点处有正则奇点，其特征方程的根分别为 $m/2$，$-m/2$；$m/2$，$-m/2$；$n+1, -n$. 作变换 $\zeta=(z+1)/2$ $u=\zeta^{-m/2}(1-\zeta)^{-m/2}w(\zeta)$ 并证明 u 满足超越几何方程。

$$\zeta(1-\zeta)u''+[m+1-(2m+2)\zeta]u' + (n-m)(n+m+1)u=0.$$

因此对于 $m\geqslant 0$ 伴随 Legendre 方程具有一个解为：

$$w(z)=(z+1)^{-m/2}(1-z)^{-m/2}\times F\left(m+n+1, m-n, m+1, \frac{z+1}{2}\right).$$

9. 证明： Bessel 方程 $w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)w=0$ 在原点具有正则奇点，这里特征方程的根为$\pm n$.

7.5 Bessel 函 数

我们已经看到（见 7.1 节）Bessel 微分方程是在用分离变量法解极坐标及球坐标下的 HelmhoHz 方程时迂到过，它是在应用数学里一个最常见的微分方程，因此它的解，Bessel 函数的研究便成为非常重要。

Bessel 微分方程是

$$z^2w''+zw'+(z^2-\nu^2)w=0,$$

这里 ν 是常数，这方程在原点有一正则奇点，在这点的特征方程是 $m^2-\nu^2=0$，它有两个根 $m_1=\nu$，$m_2=-\nu$。我们假设 $m_1-m_2=2\nu$ 不是整数，这就是说，ν 不是一整数或半整数，

则由上节的情形3，我们可以得到两个线性无关的解

$$w_1 = z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

$$w_2 = z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

将这两个级数中的第一个代入微分方程，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\nu)c_k z^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu+2} = 0.$$

$z^{\nu+1}$ 的系数是$(1+2\nu)c_1$。如果 $\nu \neq -\frac{1}{2}$，则 $c_1=0$，其余的系数则由下列递推公式确定：

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}.$$

因为 $c_1=0$，所有下标为奇数的系数全都是零。而系数 c_0 是任意的。因此

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{c_0}{2^2(1+\nu)},$$

$$c_4 = \frac{-c_2}{2^2\cdot 2(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^4\cdot 2(\nu+1)(\nu+2)},$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2\cdot 3(3+\nu)} = -\frac{c_0}{2^6\cdot 3\cdot 2(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)},$$

等等。一般，对于 $n=1,2,3,\cdots$，有

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}.$$

让我们对 c_0 作一特殊选择，即取

$$c_0 = [2^{\nu}\Gamma(\nu+1)]^{-1}$$

则

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(\nu+n+1)},$$

这就证明了

$$J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}$$

是方程的一个解。这个函数被称为第一类 ν 阶 Bessel 函数。当 ν 不是整数或半整数时，第二个线性无关的解是

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n-\nu}}{n!\Gamma(-\nu+n+1)}.$$

这个级数解是将 w_2 的幂级数代入微反方程并选取一个特殊的 γ_0 而得到的。如果

$$\nu=\frac{2p-1}{2},\quad p=1,2,3,\cdots,$$

则

$$J_{(2p-1)/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n+p}}{n!\Gamma\left(\frac{2p+2n+1}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{z}}z^pf(z),$$

这里 $f(z)$ 是一个整函数。又

$$J_{-(2p-1)/2}(z)=\sqrt{\frac{z}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n-p}}{n!\Gamma\left(\frac{-2p+2n+1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{z}{2}}\frac{1}{2p}g(z),$$

这里 $g(z)$ 是整函数且在原点没有零点。如果 $J_{(2p-1)/2}(z)$ 与 $J_{-(2p-1)/2}(z)$ 是线性相关的，则

$$\sqrt{\frac{2}{z}}z^p f(z)=\alpha\sqrt{\frac{z}{2}}\ \frac{1}{2^p}g(z),$$

$$f(z)=\frac{\alpha}{2}\ \frac{g(z)}{z^{2p-1}}.$$

但这是不可能的，除非 $2p-1\leqslant 0$ 或 $p\leqslant\frac{1}{2}$。因此如果 ν 是半奇整数，$J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$ 也是线性无关的，由简单的微分我们可以证明 $J_{-\nu}(z)$ 是微分方程的一个解。

剩下的情形是 $\nu=p$ 为一个非负的整数。虽然

$$J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{n!(n+p)!}$$

是一整函数并满足微分方程，另一方面，因

$$\frac{1}{\Gamma(-p+n+1)}=0,$$

$n=0,1,2,\cdots,p-1$，故

$$J_{-p}(z)=\sum_{n=p}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{2n-p}}{n!(n-p)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+p}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+p}}{(m+p)!m!}=(-1)^pJ_p(z).$$

所以当 $p=0,1,2,\cdots$时，$J_p(z)$ 与 $J_{-p}(z)$不是线性无关的。这需要特殊处理。按照上节的情况 2，

$$w_2(z)=J_p(z)\left[\frac{\beta_0z^{-2p}}{-2p}+\frac{\beta_1z^{-2p+1}}{-2p+1}+\cdots+\beta_p\log z+A(z)\right],$$

这里 $A(z)$是一整函数，在这情况下，$\beta_p \neq 0$ 否则 $z^{-p}\phi(z)$（这里 $\phi(z)$ 是一整函数）将是一个独立的解；而我们已经证明这个假设将导致 $J_{-p}(z)=(-1)^p J_p(z)$。

更特殊的有如下形式的解

$$Y_p(z)=\frac{2}{\pi}J_p(z)\int\left[J_p(z)\right]^{-2}\exp\left[-\int z^{-1}dz\right]dz$$

$$=\frac{2}{\pi}J_p(z)\int\frac{dz}{z[J_p(z)]^2},$$

这里 $J_p(z)$ 在原点有一 p 阶的零点，所以 $1/\{z[J_p(z)]^2\}$ 有一个$2p+1$ 阶的极点，因此可以如下展开：

$$\frac{1}{z[J_p(z)]^2}=\frac{b_{2p+1}}{z^{2p+1}}+\frac{b_{2p}}{z^{2p}}+\cdots,$$

这里

$$b_{2p+1}=\lim_{z\to 0}\frac{z^{2p}}{[J_p(z)]^2}=2^{2p}(p!)^2.$$

因此 $\beta_0=2^{2p+1}(p!)^2/\pi$，这证明了 $Y_p(z)$ 在原点是无界的，若 $p=0$ 这个结论仍是对的，这是因为出现 $\log z$ 的缘故。$Y_p(z)$ 沒有精确地加以确定，这是因为积分中缺少确定的积分限。但是，如果不计附加的常数，这个积分定义了一个所谓 p 阶的第二类 Bessel 函数。

设 ν 是一个复数，不是整数，则

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

是 $J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$ 的线性组合，所以它是 ν 解 Bessel 方程的解。这个解称为 ν 阶第二类 Bessel 函数。可以证明 $Y_\nu(z)$是 ν 的連续函数，且

$$Y_p(z)=\lim_{\nu\to p}Y_\nu(z)$$

这里 p 是整数。[注]

注意有趣的是 Bessel 微分方程还有其他的解，这解由下面方程

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z),$$
$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$$

所定义。这些函数称为 ν 阶第一类与第二类 Hankel 函数。

在特殊函数的研究中（这些函数是某些常微分方程的解）经常遇见一些概念，如递推关系，积分表示以及母函数，我们将通过 Bessel 函数来说明这些概念。例如由 Bessel 函数的级数表示，则有

$$\frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)]=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}n!\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}n!\Gamma(\nu+n)}=z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n+\nu}n!\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{2^{2n+\nu-1}\Gamma(\nu+n+1)(n-1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^{2k+1}}{2^{2k+\nu+1}k!\Gamma(\nu+k+2)}$$

$$=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$$

展开这些公式，用一撇“$'$”表示 $\frac{d}{dz}$，我们有

$$\nu z^{\nu-1}J_\nu+z^\nu J_\nu'=z^\nu J_{\nu-1},$$
$$-\nu z^{\nu-1}J_\nu+z^\nu J_\nu'=-z^\nu J_{\nu+1},$$

[注] 参看 Copson. E. T 一个复变量函数引论第十二章、伦敦牛津大学出版社 1935.

这里第二方程已经乘了 $z^{2\nu}$。两式相减并除以 z^{ν}，则有

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}J_{\nu}(z).$$

两式相加并除以 z^{ν}，则有

$$J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=2J'_{\nu}(z).$$

这些仅是重要的关系式中的少数几个，它们都能导出Bessel 函数之间的关系。

为了得到 $J_{\nu}(z)$ 的积分表示，我们从 Gamma 函数的 Hankel 的线积分开始（看第 4.10 节）。

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}e^{\zeta}\zeta^{-(\nu+n+1)}d\zeta,$$

这里路线是从 $-\infty$ 沿着负实的 ζ 轴下侧进来，逆时针方向绕原点转一周，然后再沿负实 ζ 轴上侧回到 $-\infty$，如果我们能证明下式中能交换求和与积分的次序，那么

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}J_{\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}z^{2}\right)^{n}\frac{1}{2\pi i n!}\int_{c}e^{\zeta}\zeta^{-(\nu+n+1)}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}e^{\zeta}\zeta^{-(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\frac{z^{2}}{\zeta}\right)^{n}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\exp\left(\zeta-\frac{1}{4}\frac{z^{2}}{\zeta}\right)\zeta^{-(\nu+1)}d\zeta.$$

为此考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\exp\left(\zeta-\frac{1}{4}\frac{z^{2}}{\zeta}\right)\zeta^{-(\nu+1)}d\zeta.$$

由定理4.9.3.知这是一个整函数，且可以在积分号下微分任意多次。因此它的 Maclaurin 展开式是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}z^{2}\right)^{n}\frac{1}{2\pi i n!}\int_{c}e^{\zeta}\zeta^{-(\nu+n+1)}d\zeta,$$

而

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{2\pi i}\int_c \exp\left(\zeta-\frac{1}{4}\frac{z^2}{\zeta}\right)\zeta^{-(\nu+1)}d\zeta.$$

如果 $\nu=p$ 是一整数则

$$J_p(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^p}{2\pi i}\int_c \exp\left(\zeta-\frac{1}{4}\frac{z^2}{\zeta}\right)\zeta^{-(p+1)}d\zeta,$$

且被积函数除去 $\zeta=0$ 是本性奇点外是解析的，因此我们用圆心在原点半径为 $|z|/2$ 的一圆代替积分线路，它的积分值是不变的，作了这些后，我们置变量替换 $\zeta=ze^{i\theta}/2$. 于是

$$\begin{aligned}J_p(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ip\theta+iz\sin\theta}\,d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{-ip\theta+iz\sin\theta}+e^{ip\theta-iz\sin\theta})\,d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\theta-z\sin\theta)\,d\theta,\end{aligned}$$

这是一个相当简洁的积分表示。

如果在上面 $J_p(z)$ 的积分表示中，我们把线路换成一个半径为 $|z|R/2$ 的元，并作变量替换 $\zeta=zw/2$，这里 $w=Re^{i\theta}$，则有

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}e^{z(w-w^{-1})/2}\frac{1}{w^{p+1}}\,dw\ .$$

这就是说 $J_p(z)$ 是 $e^{z(w-w^{-1})/2}$ 的 Laurent 展开式中 w^p 的系数，即

$$e^{z(w-w^{-1})/2}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}w^pJ_p(z)$$

是一 Laurent 展开式。我们说函数 $e^{z(w-w^{-1})/2}$ 是 Bessel 函

数 $J_p(z)$，$p=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$的母函数。

习 题 7.5

1. 证明 $J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$ 的 Wronshian 行列式是 $-(2\sin\nu\pi)/\pi z$。

2. 证明 $J_{\frac{1}{2}}(z)=(2/\pi z)^{\frac{1}{2}}\sin z, J_{-\frac{1}{2}}(z)=(2/\pi z)^{\frac{1}{2}}\cos z$. 从而 $z^2w''+zw'+(z^2-1/4)w=0$ 的通解是

$$(A\sin z+B\cos z)/\sqrt{z}.$$

3. 试通过初等函数求出 $J_{\frac{3}{2}}(z)$与 $J_{-\frac{3}{2}}(z)$。

4. 证明零阶 Bessel 方程的完全解在原点有一个对数性奇点。

5. 考虑微分方程 $(xy')'-(n^2/x)y'+\lambda xy=0$，证明对于整数 n，在原点具有有限值的唯一解是 $J_n(\sqrt{\lambda}x)$的一倍数。设$\sqrt{\lambda_i}b$ 是 $J_n(\sqrt{\lambda}b)=0$ 的零点，证明若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，则

$$\int_a^b xJ_n(\sqrt{\lambda_i}x)J_n(\sqrt{\lambda_j}x)dx=0.$$

6. 证明 $J_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\pi}^{i\pi}e^{z\sinh t-nt}dt.$

7. 利用母函数证明这一节关于整数阶的 Bessel 函数的所有递推关系式。

7.6 Legendre 函 数

我们已经看到，Legendre 方程与伴随 Legendre 方程是在用分离变量法解球坐标下的 Laplace 方程与 Helmholtz's 方程时迁到的。Legendre 方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+\lambda w=0$$

在原点有一个正常点，在 ±1 处有正则奇点，且在无穷远处有一个正则奇点。让我们寻求这样一个解，在原点是解析的。假设

$$w=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

代入微分方程，则有

$$(1-z^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2}-2z\sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k=0.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2)(m+1)c_{m+2}-m(m+1)c_m+\lambda c_m]z^m=0.$$

因此，系数的递推关系是

$$c_{m+2}=\frac{m(m+1)-\lambda}{(m+2)(m+1)}c_m,$$

$m=0,1,2,\cdots$，如果设 $c_1=0$ 而 $c_0\neq0$，则得一个只含 z 的偶数幂的级数，如果我们设 $c_0=0$，而 $c_1\neq0$ 则得一个只含 z 的奇数幂的级数。于是

$$w=c_0w_1(z)+c_1w_2(z),$$

这里 w_1 仅含偶数幂，$w_2(z)$ 仅含奇数幂，级数对于 $|z|<1$ 都是收敛的，而且两个函数显然是线性无关的。因此对于 $|z|<1$ 这是方程的完全解。

有重要意义的是在 $z=\pm1$ 处有有限值的那些解。注意在递推公式中，如果 $\lambda=n(n+1)$，这里 n 是一非负的整数，那么 $c_{n+2}=c_{n+4}=\cdots=0$，而相应的级数便成为一个多项式。如果乘以适当的常数使得 $p_n(1)=1$，这时所得的多项式称为 Legendre 多项式。例如

$$p_0(z)=1,\ p_1(z)=z,\ p_2(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1),\ p_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z),$$ 等等。

为了得到一般公式，对于充分大的 $|z|$，考虑

$$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$$

的解。假定有一个如下形式的解

$$w=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k-m}.$$

特征方程是$m^2-m-n(n+1)=0$，这个方程有两个根 $m_1=-n$ $m_2=n+1$. 取 $m=-n$ 则

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{n-k},$$

$$w'=\sum_{k=0}^{\infty}(n-k)c_k z^{n-k-1},$$

$$w''=\sum_{k=0}^{\infty}(n-k)(n-k-1)c_k z^{n-k-2},$$

代入微分方程，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n-k)(n-k-1)c_k z^{n-k-2}-$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n-k)(n-k-1)c_k z^{n-k}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}2(n-k)c_k z^{n-k}+\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)c_k z^{n-k}=0$$

或

$$2nc_1 z^{n-1}+\sum_{m=0}^{n}[(n-m)(n-m-1)c_m$$
$$-(m+2)(m-2n+1)c_{m+2}]z^{n-m-2}=0.$$

如果 $n\neq 0$，则 $c_1=0$，c_0 是任意的而其余系数可由下列递推公式确定

$$c_{m+2}=\frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+2)(m-2n-1)}c_m$$

$m=0,1,2,\cdots$，因此 $c_1=c_3=c_5=\cdots=0$，再注意 $c_{n+2}=c_{n+4}=\cdots=0$，所以这解是一多项式

$$w = c_0 z^n \Big[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{-4} - \cdots +$$

$$+ (-1)^j \frac{(n!)^2 (2n-2j)!}{(2n)!\, j!\,(n-2j)!\,(n-j)!} z^{-2j} + \cdots \Big].$$

如果 n 是偶数，当 $j = n/2$ 时级数终止。如果 n 是奇数，当 $j = (n-1)/2$ 时级数终止。特别，若取 $c_0 = (2n)!/2^n(n!)^2$，便得到 Legendre 多项式.

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j!\,(n-j)!\,(n-2j)!} z^{n-2j},$$

这里若 n 是偶数，$N = n/2$，若 n 是奇数，$N = (n-1)/2$。我们注意到

$$\frac{d^n}{dx^n} z^{2n-2j} = \frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!} z^{n-2j}.$$

从而

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{2^n j!\,(n-j)!} \frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2j}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j n!}{(n-j)!} z^{2n-2j}.$$

在最后的表示式中，和式是一个 2^n 次多项式，其中 $n-1$ 次或者小于 $n-1$ 次的各项都消失为零。如果我们加上这些 $n-1$ 次或小于 $n-1$ 次的各项，那么在求 n 次导数时，它们都变为零，所以

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j n!}{j!\,(n-j)!} z^{2n-2j}.$$

但上式中的和式恰好是函数 $(z^2-1)^n$ 的二项式展开式，故

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n .$$

这叫做 Rodrigue 公式。由于 $P_n(z)$ 表示为一个解析函数的 n 次导数，所以应用 n 阶导数的 Cauchy 公式我们就得到一个明显的积分表示式：

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

这里 c 是围绕 $\zeta=z$ 的任意一条单闭曲线。特别 c 取为园

$$|\zeta-z|=\sqrt{|z^2-1|},$$

则

$$\zeta=z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta},$$

$$d\zeta=i(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}d\theta,$$

$$\zeta^2-1=2(\zeta-z)[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]$$

因此

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]^n d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]^n d\theta.$$

这称做 Legendre 多项式的 Laplace 第一积分。

为了得到 $P_n(z)$ 的母函数，作和式

$$\sum_{n=0}^{\infty}w^n P_n(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}w^n[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]^n d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-wz-w(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{(1-2wz+w^2)^{\frac{1}{2}}},$$

但这里还必须证明上式中求和与积分可交换次序。为此有

$$|w[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]|\leqslant|w|(|z|+|z^2-1|^{\frac{1}{2}})$$

$$\leqslant\rho<1,$$

其中假定

$$|w|\leqslant\frac{\rho}{|z|+|z^2-1|^{\frac{1}{2}}}.$$

因此，当$|w|$充分小时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}w^n[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta]^n$$

对于θ是绝对且一致收敛，因此求和与积分互相交换次序是允许的。现在，$(1-2wz+w^2)^{\frac{1}{2}}$作为$w$的函数在$z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$有支点，而且有一个$w$的幂的 Maclaurin 展开式，它在

$$|w|<\min[|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|,\ |z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|]$$

内有效，由唯一性知一定是$\sum_{n=0}^{\infty}w^nP_n(z)$.

从下列母函数

$$W=(1-2zw+w^2)^{-\frac{1}{2}}$$

我们能够求得 Legendre 多项式的递推关系。

我们有

$$\frac{dW}{dw}=(z-w)(1-2zw+w^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

因此

$$(1-2zw+w^2)\frac{dW}{dw}=(z-w)W,$$

$$(1-2zw+w^2)\sum_{n=0}^{\infty}nw^{n-1}P_n(z)=(z-w)\sum_{n=0}^{\infty}w^nP_n(z),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)P_{m+1}(z)-(2m+1)zP_m(z)+mP_{m-1}(z)]w^m=0.$$

因为 w^m 的系数对于所有的 m 都必须为零，故

$$(m+1)P_{m+1}(z)-(2m+1)zP_m(z)+mP_{m-1}(z)=0.$$

我们还有

$$\frac{\partial W}{\partial z}=w(1-2zw+w^2)^{-\frac{3}{2}},$$

因此

$$w\frac{\partial W}{\partial w}=(z-w)\frac{\partial W}{\partial z},$$

$$w\sum_{n=0}^{\infty}nw^{n-1}P_n(z)=(z-w)\sum_{n=0}^{\infty}w^nP_n'(z).$$

如果设 $P_{-1}(z)=0$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[mP_m(z)-zP_m'(z)+P_{m-1}'(z)]w^m=0.$$

因此有

$$mP_m(z)-zP_m'(z)+P_{m-1}'(z)=0.$$

为了寻求 Legendre 方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$$

的完全解，像 7.4 节那样，作变换 $w=P_n(z)v(z)$，得到第二解

$$w_2(z)=P_n(z)\int_{z_0}^{z}\frac{d\xi}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)},$$

这里的积分路线是不经 ±1 或 $P_n(z)$ 的零点的任一路线。现在 $P_n(z)$ 在 ±1 处不为零，因此 $(z^2-1)^{-1}[P_n(z)]^2$ 有部分分式展开式，它包含下列形式的项

$$\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1},$$

这里

$$A=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)P_n^2(z)}=\frac{1}{2},$$

$$B=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)P_n^2(z)}=-\frac{1}{2}.$$

所以 Legendre 方程的完全解是

$$w=c_1P_n(z)+c_2\left[\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}+N_{n-1}(z)\right],$$

这里 $N_{n-1}(z)$ 能被证明是一个 $n-1$ 次的多项式。由于对数关系，第二个解在实轴上 -1 与 $+1$ 之间有一支割线。第二个解又可写成下面形式，

$$Q_n(z)=P_n(z)\int_\infty^z\frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)P_n^2(\zeta)},$$

这里积分路线不穿过割线 $-1\leqslant x\leqslant 1$. $Q_n(z)$ 叫做第二类 Legendre 函数。

伴随 Legendre 方程是

$$(1-z^2)w''-2zw'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0.$$

我们已经看到用分离变量法解球坐标下的 Laplace 方程得到这结果。我们只考虑 n 与 m 是整数的情形。这方程在 ±1 与 ∞ 处有正则奇点，容易看出，特征方程在 ±1 处都有根 $m/2$。因此，作初步的变换 $w=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}v(z)$，则 v 满足方程

$$(1-z^2)v''-2(m+1)zv'+(n-m)(n+m+1)v=0.$$

如果我们现在设 $v=\dfrac{d^m}{dz^m}u(z)$，则有

$$(1-z^2)u^{(m+2)}-2(m+1)zu^{(m+1)}+$$
$$(n-m)(n+m+1)u^{(m)}=0,$$

由于

$$\frac{d^m}{dz^m}(1-z^2)u''=(1-z^2)u^{(m+2)}-2zmu^{(m+1)}-m(m-1)u^{(m)},$$

$$\frac{d^m}{dz^m}(-2zu')=-2zu^{(m+1)}-2mu^{(m)}.$$

故方程可以写做

$$\frac{d^m}{dz^m}[(1-z^2)u''-2zu'+n(n+1)u]=0$$

因此，如果 u 满足 Legendre 方程，那么

$$w=(z^2-1)^m u^{(m)}(z)$$

满足伴随 Legendre 方程。这样我们就证明了两个线性无关解是

$$P_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z),$$

$$Q_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z).$$

这些函数叫做第一类与第二类的伴随Legendre函数。如果对于 $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ 取定适当一支，则可使它们显然在沿实轴从 -1 到 $+1$ 的割断的平面上是解析的。假如 m 是偶数，$P_n^m(z)$ 是一多项式。如果 m 是奇数，$P_n^m(z)$ 在 ±1 处有支点。为了确定计，对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 我们定义

$$P_n^m(x)=(-1)^n(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

这里取 $1-x^2$ 的正的平方根。

如果 $m\leqslant n$，$P_n^m(z)$ 是伴随 Legendre 方程的一个非平凡解，这个解在 ±1 是有限的。可以证明在 ±1 处具有有限值的解仅是 $P_n^m(z)$ 的倍数。回忆一下，在球坐标的 Laplace 方程中进行分离变量时，我们曾经导出以 $x=\cos\phi$ 为变量的伴

随 Legendre 方程，并且要求它的解在 $\phi=0$ 与 $\phi=\pi$，即 $x=\pm1$ 处有有限值。因此容易证明在 $\rho=0$ 处具有有限值，是 θ 的周期函数以及在 $\phi=0$ 与 $\phi=\pi$ 处也具有有限值的 Laplace 方程的解具有如下形式：

$$\rho^n[AP_n^m(\cos\phi)\cos n\theta+BP_n^m(\cos\phi)\sin n\theta],$$

函数

$$AP_n^m(\cos\phi)\cos n\theta+BP_n^m(\cos\phi)\sin n\theta$$

称为球调和函数。它们在球坐标下的 Laplace 方程的解的研究中起着基本的作用。

习　题 7.6

1. 如果 $m\neq n$，证明 $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$。

2. 证明 $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\dfrac{2}{n+1}$。

3. 利用母函数证明 $P_n(1)=1$ 及 $P_n(-1)=(-1)^n$

4. 证明 $P_n(z)$ 所有的零点都是实的，互异的，而且都位于 -1 与 1 之间。

5. 证明

    (a) $P_n'-zP_{n-1}'=nP_{n-1}$;

    (b) $P_{n+1}'-P_{n-1}'=(2n+1)P_n$;

    (c) $(z^2-1)P_n'=nzP_n-nP_{n-1}$.

6. 证明

$$\frac{1}{(z^2-1)P_n^2(z)}=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2z+1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{(z-x_j)^2}$$

这里 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是 $P_n(z)$ 的零点，从而证明

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}+N_{n-1}(z),$$

这里 $N_{n-1}(z)$ 是 $n-1$ 次的多项式。

7. 若 $n\neq k$，证明$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_k^m(x)\,dx=0$.

8. 证明 $\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

9. 若 $m\neq k$，证明$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^k(x)\frac{dx}{1-x^2}=0$.

10. 证明 $\int_{-1}^{1}\frac{[P_n^m(x)]^2}{1-x^2}dx=\frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

7.7 Sturm-Liouville 问题

我们已经看过 Sturm-Liouville 微分方程的几个例子，例如

$$y''+n^2y=0,$$

$$(xy')'-\frac{\nu^2}{x}+\lambda xy=0,$$

$$[(1-x^2)y']'+n(n+1)y=0.$$

一般 Sturm-Liouville 方程可写作下面形式

$$(P(x)y')'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,$$

这里 $P(x)$，$q(x)$ 及 $\rho(x)$ 是已知函数，$P(x)$ 是可微分的。这个方程对于研究偏微分方程是十分重要的，因为在很多情况下，用分离变量法解偏微分方程都将导出这种方程。

Sturm-Liouville 方程的主要意义是在边值问题的研究上，在这节，我们仅将涉及正则的 Sturm-Liouville 问题，即假定在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上（a 与 b 是有限的），有

1. $P'(x)$，$q(x)$ 及 $\rho(x)$ 是连续的；
2. $P(x)$ 及 $\rho(x)$ 是正的；
3. $Ay(a)+By'(a)=0$，与 $Cy(b)+Dy'(b)=0$.

其中 A,B,C,D 是实常数。如果 a 或 b 不是有限的，或者上述三个基本假设中的一个不成立，便是奇性 Sturm-Liouville问题。许多这样的问题已经被人们研究过[注]。在这里不可能讨论所有的特殊情形，所以我们仅研究正则问题。

各种边界条件包括在正则情形里，例如，如果$A=C=1$及$B=D=0$，则 $y(a)=y(b)=0$。如果 $B=D=1$ 及 $A=C=0$则 $y'(a)=y'(b)=0$。如果$B\neq0$ 与$D\neq0$，则 $y'(a)+\mu y(a)=0$，$y'(b)+\nu y(b)=0$，这里 $\mu=A/B$，$\nu=C/D$。这些各种各样边界条件都有物理意义，这与各种特殊的应用有关，这些应用由于太广泛以致这里不能一一去叙述它们。

在分析正则的 Sturm-Liouville 问题之前，我们将取一个初步变换将微分方程化简。设$u=gy$与$t=\int_a^x(\rho/P)^{\frac{1}{2}}dx$，这里 $g=(\rho P)^{\frac{1}{4}}$。于是若用一撇表示对 x 的微分，而用一点表示对 t 的微分，就有

$$y'=\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{g}\right)\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\dot{u}}{g}-\frac{u}{g^2}\dot{g}\right)\left(\frac{\rho}{P}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Py'=g\dot{u}-u\dot{g},$$

$$(Py')'=(g\ddot{u}-u\ddot{g})\left(\frac{\rho}{P}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\rho}{g}\ddot{u}-u\ddot{g}\frac{\rho}{g^2},$$

$$(Py')'-qy+\lambda\rho y=\frac{\rho}{g}\left[\ddot{u}-\left(\frac{\ddot{g}}{g}+\frac{q}{\rho}\right)u+\lambda u\right]=0.$$

因 $\rho/g\neq0$，微分方程成为

$$\ddot{u}+[\lambda-Q(t)]u=0,$$

[注] 读者可阅读 E.C Titchmarsh，“与二阶微分方程相联系本征函数展开”伦敦，牛津大学 1946 出版，有中译本。

这里[注]

$$Q(t)=\frac{\ddot{g}}{g}+\frac{q}{\rho}.$$

边界条件变成

$$Ay(a)+By'(a)=A\frac{u(0)}{g(0)}+B\left(\frac{\dot{u}(0)}{g(0)}-\frac{u(0)}{g^2(0)}\dot{g}(0)\right)$$

$$\times\left[\frac{\rho(a)}{P(a)}\right]^{\frac{1}{2}}=A'u(0)+B'\dot{u}(0)=0,$$

$$Cy(b)+Dy'(b)=C\frac{u(\tau)}{g(\tau)}+B\left(\frac{\dot{u}(\tau)}{g(\tau)}-\frac{u(\tau)}{g^2(\tau)}\dot{g}(\tau)\right)$$

$$\times\left[\frac{\rho(b)}{P(b)}\right]^{\frac{1}{2}}=C'u(\tau)+D'\dot{u}(\tau)=0,$$

这里 $\tau=\int_a^b(\rho/P)^{\frac{1}{2}}dx$，故边界条件的一般形式不改变。

在证明了 Sfurm-Liouville 问题能简化成上述形状后，今后我们将研究下述问题：

(a) 齐次问题： $y''+[\lambda-q(x)]y=0$，$\cos\alpha y(a)+\sin\alpha y'(a)=0$，$\cos\beta y(b)+\sin\beta y'(b)=0$，这里$\alpha$与$\beta$是实数，$q(x)$是给定的实値連续函数。

(b) 非齐次问题： $y''+[\lambda-q(x)]y=f(x)$，$\cos\alpha y(a)+\sin\alpha y'(a)=0$，$\cos\beta y(b)+\sin\beta y'(b)=0$，这里 λ是已知的，$f(x)$是给定的实値分段連续函数并且有分段連续的导数。

[注] 这个方法的有效性在于 $P(x)$ 与 $\rho(x)$ 是二次连续可微的。然而我们可以这样得到的结果不依赖于微分方程的这种变换。

假定非齐次问题有唯一的解$y(x)$，那么对应的齐次问题不能有非平凡（即不恒等于零）的解 $u(x)$。否则 $y+cu$（对于任意 c）将也是非齐次问题的一个解。因而解 y 就不可能是唯一的。

另一方面，假定齐次问题沒有非平凡解，则 $y''+(\lambda-q)y=0$ 存在线性无关的解 $\phi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$，满足条件

$$\phi(a,\lambda)=\sin\alpha,\ \phi'(a,\lambda)=-\cos\alpha,$$
$$\psi(b,\lambda)=\sin\beta,\ \psi'(b,\lambda)=-\cos\beta,$$

这些函数可以由两个任意线性无关的解 $u(x,\lambda)$ 与 $v(x,\lambda)$ 来构成，因为如果

$$\phi(x,\lambda)=c_1u+c_2v,$$
$$\sin\alpha=c_1u(a)+c_2v(a)$$
$$-\cos\alpha=c_1u'(a)+c_2v'(a)$$

于是

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}\sin\alpha & v(a)\\ -\cos\alpha & v'(a)\end{vmatrix}}{W(u,v)}=\frac{v'(a)\sin\alpha+v(a)\cos\alpha}{W(u,v)},$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}u(a) & \sin\alpha\\ u'(a) & -\cos\alpha\end{vmatrix}}{W(u,v)}=\frac{-\sin\alpha u'(a)-\cos\alpha u(a)}{W(u,v)},$$

这里 Wronskian 行列式 $W(u,v)=uv'-vu'$ 与 x 无关，而且恒不为零。因此

$$\phi(x,\lambda)=\frac{[\sin\alpha v'(a)+\cos\alpha v(a)]u}{W(u,v)}$$
$$-\frac{[\sin\alpha u'(a)+\cos\alpha u(a)]v}{W(u,v)}$$

α 与 β，a 与 b 交换，则有

$$\psi(x,\lambda)=\frac{[\sin\beta v'(b)+\cos\beta v(b)]u}{W(u,v)}$$

$$-\frac{[\sin\beta u'(b)+\cos\beta u(b)]v}{W(u,v)}.$$

现在，$\cos\alpha\phi(a,\lambda)+\sin\alpha\phi'(a,\lambda)=0$，如果 Wronskian 行列式 $W(\phi,\psi)=\phi\psi'-\psi\phi'=0$，则 $\phi=K\psi$，这里 K 是一非零的常数，但在 $\cos\beta\phi(b,\lambda)+\sin\beta\phi'(b,\lambda)=0$ 的情况下，ϕ 是齐次问题的非平凡解，但我们已经假定不存在这样的解，所以，$\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 是线性无关的，而且用常数变易法，可以证明：

$$y(x)=\frac{\psi(x,\lambda)}{W(\phi,\psi)}\int_a^x\phi(t,\lambda)f(t)\,dt$$

$$+\frac{\phi(x,\lambda)}{W(\phi,\psi)}\int_x^b\psi(t,\lambda)f(t)\,dt$$

是非齐次问题的一个解。这个解是唯一的，因为如果 y_1 与 y_2 是非齐次问题的解，则 y_1-y_2 将是齐次问题的解，但我们已经假定齐次问题仅有平凡解 $y_1-y_2=0$ 存在，于是我们便证明了下面的定理：

定理 7.7.1. 非齐次正则 Sturm-Liouville 问题(b)有唯一的解的充分而必要条件是：对应的齐次问题 (a) 仅有平凡解。

剩下来只须考虑，当对应的齐次问题有非平凡解时，非齐次问题解的存在问题，这就是说，这时非齐次问题可能存在解，虽然它不是唯一的，如果 λ_k 是使 $u_k''+(\lambda_k-q)u_k=0$ 有一个非平凡解 u_k 且满足边界条件的数，那么 λ_k 称为特征值 u_k 称为特征函数。

我们可以证明特征值都是实数，因为若 $u_k''+(\lambda_k-q)u_k=0$，

$\cos\alpha u_k(a)+\sin\alpha u_k'(a)=0$, $\cos\beta u_k(b)+\sin\beta u_k'(b)=0$，则

$$\bar{u}_k''+(\bar{\lambda}-q)\bar{u}_k=0,$$
$$\cos\alpha\bar{u}_k(a)+\sin\alpha\bar{u}_k'(a)=0,$$
$$\cos\beta\bar{u}_k(b)+\sin\beta\bar{u}_k'(b)=0,$$

于是

$$(\bar{\lambda}-\lambda_k)\int_a^b |u_k|^2dx=[u_k\bar{u}_k'-\bar{u}_ku_k']_a^b=0.$$

但$\int_a^b |u_k|^2dx$ 是正的，因而$\bar{\lambda}_k=\lambda_k$

由同样的计算可知，若 u_j 与 u_k 是同特征值 $\lambda_j\neq\lambda_k$ 所对应的特征函数，则

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b u_ju_kdx=[u_ju_k'-u_ku_j']_a^b=0,$$

所以$\int_a^b u_ju_kdx=0$，即 u_j 与 u_k 是正交。

函数 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 在齐次问题的研究中起着重要的作用。事实上，下面定理建立了齐次问题的特征值与 Wronskian 行列式 $W(\phi,\psi)$ 的零点的一个强有力的联系。

定理 7.7.2. 设 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 是

$$y''+(\lambda-q)y=0$$

的解，它们满足 $\phi(a,\lambda)=\sin\alpha$，$\phi'(a,\lambda)=-\cos\alpha$，$\psi(b,\lambda)=\sin\beta$，$\psi'(b,\lambda)=-\cos\beta$，则 Wronskian 行列式$W(\phi,\psi)$仅是 λ 的函数，并且 λ_i 是齐次问(a) 的特征值的充要条件是：λ_i 是 $w(\lambda)=W(\phi,\psi)$ 的一个零点。

证明 为要证明$W(\phi,\psi)$ 与 x 无关，我们证明

$$\frac{d}{dx}W(\phi,\psi)=\frac{d}{dx}(\phi\psi'-\psi\phi')=\phi\psi''-\psi\phi''$$
$$=\psi(\lambda-q)\phi-\phi(\lambda-q)\psi$$
$$=0.$$

若 $w(\lambda_i)=0$，则 $\phi(x,\lambda_i)\psi'(x,\lambda_i)-\psi(x,\lambda_i)\phi'(x,\lambda_i)=0$，由此可以证明 $\phi(x,\lambda_i)=k_i\psi(x,\lambda_i)$，这里 k_i 是一个非零的常数，在这情况下，

$$\cos\alpha\phi(a,\lambda_i)+\sin\alpha\phi'(a,\lambda_i)=0,$$
$$\cos\beta\phi(b,\lambda_i)+\sin\beta\phi'_i(b,\lambda_i)=0.$$

这就证明了 $\phi(x,\lambda_i)$ 是一个特征函数，而 λ_i 是一个特征值。

反之，若 $w(\lambda_i)\neq0$ 则 $\phi(x,x_i)$ 与 $\psi(x,\lambda_i)$ 是线性无关的，从而齐次问题的任一解 $u(x)$ 是 ϕ 与 ψ 的线性组合，即

$$u(x)=c_1\phi(x,\lambda_i)+c_2\psi(x,\lambda_i).$$

现在若 u 满足边界条件

$$\cos\alpha u(a)+\sin\alpha u'(a)=c_2[\cos\alpha\psi(a,\lambda_i)+\sin\alpha\psi'(a,\lambda_i)]=0,$$

$$\cos\beta u(b)+\sin\beta u'(b)=c_1[\cos\beta\phi(b,\lambda_i)+\sin\beta\phi'(b,\lambda_i)]=0.$$

如果方括号内表示式，无论那一个为零，则 $w(\lambda_i)=0$，这与假设矛盾，所以 $c_1=c_2=0$ 与 $u\equiv0$ 是一平凡解。这完成了证明

定理 7.7.2 表明：为要确定齐次问题 (a) 的特征值，可以研究 $\omega(\lambda)$ 的零点。

定理 7.7.3. 设 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 定义如定理 7.7.2，则 $w(\lambda)=W(\phi,\psi)$ 是 λ 的一个整函数，且只有简单零点。

证明 容易证明 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 满足下面积分方程

$$\phi(x,\lambda)=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha+\int_a^x(q-\lambda)(x-t)\phi(t,\lambda)dt,$$

$$\psi(x,\lambda)=\sin\beta-(x-b)\cos\beta+\int_b^x(q-\lambda)(x-t)\psi(t,\lambda)dt,$$

应用定理 7.2.1 用过的迭代法可以证明这些积分方程存在唯一的解。设 $\phi_0=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha$，$\psi_0=\sin\beta-(x-b)\cos\beta$，

于是定义

$$\phi_1 = \phi_0 + \int_a^x (q-\lambda)(x-t)\phi_0 dt,$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \int_b^x (q-\lambda)(x-t)\psi_0 dt,$$

或一般

$$\phi_n = \phi_0 + \int_a^x (q-\lambda)(x-t)\phi_{n-1} dt,$$

$$\psi_n = \psi_0 + \int_b^x (q-\lambda)(x-t)\psi_{n-1} dt.$$

则

$$\phi(x,\lambda) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n - \phi_{n-1}),$$

$$\psi(x,\lambda) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n - \psi_{n-1}).$$

我们可以证明这些级数对于每个 λ 都是收敛的，而对于 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的 x 而言是一致收敛的。为了证明这点，我们有

$$|\phi_1 - \phi_0| = \left|\int_a^x (q-\lambda)(x-t)\phi_0 dt\right|$$
$$\leqslant M(Q+R)(x-a)^2/2,$$

$$|\psi_1 - \psi_0| = \left|\int_b^x (q-\lambda)(x-t)\psi_0 dt\right|$$
$$\leqslant M(Q+R)(b-x)^2/2,$$

这里 $M = \max[|\phi_0|, |\psi_0|]$，$Q = \max|q|$，及 $|\lambda| \leqslant R$. 此外

$$|\phi_2 - \phi_1| = \left|\int_a^x (q-\lambda)(x-t)(\phi_1 - \phi_0) dt\right|$$

$$\leqslant \frac{M(Q+R)^2(b-a)}{2}\int_a^x (t-a)^2 dt$$

$$\leqslant \frac{M(Q+R)^2(b-a)(x-a)^3}{3!},$$

$$|\psi_2-\psi_1| = \left|\int_x^b (q-\lambda)(x-t)(\psi_1-\psi_0)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{M(Q+R)^2(b-a)}{2}\int_x^b (b-t)^2\,dt$$

$$\leqslant \frac{M(Q+R)^2(b-a)(b-x)^3}{3!},$$

由归纳法

$$|\phi_n-\phi_{n-1}| \leqslant \frac{M(Q+R)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|\psi_n-\psi_{n-1}| \leqslant \frac{M(Q+R)^n(b-a)^{n-1}(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

所以级数$\phi_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\phi_n-\phi_{n-1})$与$\psi_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\psi_0-\psi_{n-1})$对于$a\leqslant x\leqslant b$一致收敛。为了证明它们满足积分方程，只须把它们代入并逐次地积分即得。

上面不等式亦证明了，对于每个x与每个R，级数对于$|\lambda|\leqslant R$内的λ是一致收敛的。由于级数中每项是λ的解析函数，所以函数$\phi(x,\lambda)$与$\psi(x,\lambda)$是λ的整函数，因此，$w(\lambda)$也是整函数。

为了证明$w(\lambda)$的零点都是简单的，我们将首先证明它不恒等于零。容易证明

$$(\lambda-\lambda')\int_a^b \phi(x,\lambda)\phi(x,\lambda')\,dx = \phi(b,\lambda)\phi'(b,\lambda')$$

$$-\phi(b,\lambda')\phi'(b,\lambda).$$

倘若$\sin\beta\neq 0$则

$$\sin\beta(\lambda-\lambda')\int_a^b \phi(x,\lambda)\phi(x,\lambda')\,dx = w(\lambda')\phi(b,\lambda)$$

$$-w(\lambda)\phi(b,\lambda')$$

及

$$(\lambda-\lambda')\int_a^b \phi(x,\lambda)\phi(x,\lambda')dx=\pm[w(\lambda)\phi'(b,\lambda')$$
$$-w(\lambda')\phi'(b,\lambda,],$$

如果 $\sin\beta=0$，那么取决于是否 $\cos\beta=\pm1$. 无论那一种情形，如果 $w(x)\equiv0$，则对于 $\lambda\neq\lambda'$，$\int_a^b \phi(x,\lambda)\phi(x,\lambda')dx=0$. 因此，当 λ 与 λ' 是实数时，

$$\lim_{\lambda'\to\lambda}\int_a^b \phi(x,\lambda)\phi(x,\lambda')dx=\int_a^b \phi^2(x,\lambda)dx=0.$$

这意味着 $\phi(x,\lambda)\equiv0$；但这是不能的。故 $w(\lambda)$ 不能恒等于零。这结果表明了 $w(\lambda)$ 的零点不可能有有限的极限点，因为如果确是这样，$w(\lambda)$将恒等于零。

设 λ_k 是 $w(\lambda)$ 的一个零点。如果这是二阶或较高阶的零点，那么 $w(\lambda_k)=w'(\lambda_k)=0$，从而

$$w(\lambda_k+i\tau)=-\tau^2w''(\lambda_k)+\text{含}\ \tau\ \text{的更高阶的项},$$
$$w(\lambda_k-i\tau)=-\tau^2w''(\lambda_k)+\text{含}\ \tau\ \text{的更高阶的项},$$

这里我们是假设 τ 是实数，在下式中设 $\lambda=\lambda_k+i\tau$ 及 $\lambda'=\lambda_k-i\tau$ 于是

$$-2i\tau\sin\beta\int_a^b \phi(x,\lambda)\overline{\phi}(x,\lambda)dx=-\tau^2w''(\lambda_k)$$
$$\times[\phi(b,\lambda)-\overline{\phi}(b,\lambda)]+\text{含}\ \tau\ \text{的更高阶的项}。$$

或

$$2i\tau\int_a^b \phi(x,\lambda)\overline{\phi}(x,\lambda)dx=\mp\tau^2w''(\lambda_k)$$
$$\times[\overline{\phi}'(b,\lambda)-\phi'(b,\lambda)]+\text{含}\ \tau\ \text{更高阶的项}。$$

这取决于 $\sin\beta\neq0$ 或 $\sin\beta=0$。将上式两端除以 τ，并令 τ 趋于零而求其极限，无论那种情形都有$\int_a^b \phi^2(x,\lambda_k)dx=0$，这是一个矛盾。这就完成了定理 7.7.3 的证明。

为了完成正则的 Sturm-Liouville 问题的讨论，我们必须

证明：凡具有逐段连续的导数，并定义在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的任一逐段连续函数，都能展开成齐次问题 (b) 的特征函数的级数。方法是积分非齐次问题 (a) 的解

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Cn+} y(x,\lambda)\,d\lambda,$$

这里 $\{c_n\}$ 是一列封闭线路，将在以后叙述。我们将证明对于充分大的 n，c_n 不经过 $w(\lambda)$ 的任何零点。如果零点 λ_k 是在 c_n 内，则积分值将等于

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\int_a^x \phi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{\phi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\int_x^b \psi(t,\lambda)f(t)\,dt$$

在单极点 λ_k 处的留数，容易看出是

$$\frac{A_k\phi(x,\lambda_k)}{w'(\lambda_k)}\int_a^b \phi(x,\lambda_k)f(t)\,dt,$$

这里 A_k 是关系 $\psi(x,\lambda_k)=A_k\phi(x,\lambda_k)$ 中的常数。因此，如果能够证明下式左端的极限存在，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{Cn+} y(x,\lambda)\,d\lambda=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k\phi(x,\lambda_k)}{w'(\lambda_k)}\int_a^b \phi(t,\lambda_k)f(t)\,dt,$$

这里和式展布于 $w(\lambda)$ 所有的零点。我们将证明这极限存在，并且，事实上就是 $f(x)$ 的 Fourir 级数[注]。这将证明

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k\phi(x,\lambda_k)}{w'(\lambda_k)}\int_a^b \phi(t,\lambda_k)f(t)\,dt,$$

这里

$$f(x^+)=\lim_{t\to x^+}f(t),\quad f(x^-)=\lim_{t\to x^-}f(t);$$

$$f(a^-)=\lim_{C\to b^-}f(t),\quad f(b^+)=\lim_{t\to a^+}f(t).$$

[注] 请看第8.1节

如果定义 $\Phi_k(x)=\left[\dfrac{A_k}{w'(\lambda_k)}\right]^{\frac{1}{2}}\phi(x,\lambda_k)$，则

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\Phi_k(x),$$

这里

$$c_k=\int_a^b\Phi_k(x)f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b\Phi_j(x)\Phi_k(x)\,dx=0\quad j\neq k,$$

$$\int_a^b\Phi_k^2(x)\,dx=1$$

定理 7.7.4. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的具有逐段连续导数的任意逐段连续函数，则 $f(x)$ 可以展成如下齐次 Sturm-Liouville 问题 (a) 的特征函数的级数

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\Phi_k(x),$$

这里

$$c_k=\int_a^b\Phi_k(x)f(x)\,dx$$

及

$$\int_a^b\Phi^2(x)\,dx=1$$

证明 容易证明 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 满足下面的积分方程

$$\phi(x,\zeta^2)=\sin\alpha\cos\zeta(x-a)-\frac{\cos\alpha\sin\zeta(x-a)}{\zeta}$$

$$+\frac{1}{\zeta}\int_a^x\sin\zeta(x-t)q(t)\phi(t,\zeta^2)\,dt,$$

$$\psi(x,\zeta^2)=\sin\beta\cos\zeta(x-b)-\frac{\cos\beta\sin\zeta(x-b)}{\zeta}$$

$$+\frac{1}{\zeta}\int_b^x \sin\zeta(x-t)q(t)\psi(t,\zeta^2)dt,$$

这里设$\lambda=\zeta^2$，置$\zeta=\xi+i\eta$及

$$\phi(x,\zeta^2)=e^{|\eta|(x-a)}F(x)$$

$$\psi(x\ \zeta^2)=e^{|\eta|(b-x)}G(x)$$

于是

$$F(x)=\left[\sin\alpha\cos\zeta(x-a)-\frac{\cos\alpha\sin\zeta(x-a)}{\zeta}\right]$$

$$\times e^{-|\eta|(t-a)}+$$

$$+\frac{1}{\zeta}\int_a^x \sin\zeta(x-t)q(t)e^{-|\eta|(x-t)}F(t)dt,$$

$$G(x)=\left[\sin\beta\cos\zeta(x-b)-\frac{\cos\beta\sin\zeta(x-b)}{\zeta}\right]$$

$$\times e^{-|\eta|(b-x)}+$$

$$+\frac{1}{\zeta}\int_b^x \sin\zeta(x-t)q(t)e^{-|\eta|(x-t)}G(t)dt.$$

若$M_1=\max|F(x)|$与$M_2=\max|G(x)|$，并设$|\zeta|$充分大，则

$$M_1\leqslant|\sin\alpha|+\frac{|\cos\alpha|}{|\zeta|}+\frac{1}{|\zeta|}\int_a^b|q(t)|M_1dt,$$

$$M_2\leqslant|\sin\beta|+\frac{|\cos\beta|}{|\zeta|}+\frac{1}{|\zeta|}\int_a^b|q(t)|M_2dt,$$

即 $$M_1\leqslant\left(|\sin\alpha|+\frac{|\cos\alpha|}{|\zeta|}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{|\zeta|}\int_a^b|q(t)|dt\right),$$

$$M_2 \leqslant \left(|\sin\beta| + \frac{|\cos\beta|}{|\zeta|} \right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{|\zeta|} \int_a^b |q(t)|\, dt \right),$$

这就表明[注]，如果 $\sin\alpha \neq 0$，则

$$\phi(x, \zeta^2) = \sin\alpha \cos\zeta(x-a) + O(|\zeta|^{-1} e^{|\eta|(x-a)}),$$

如果 $\sin\alpha = 0$，则

$$\phi(x, \zeta^2) = -\frac{\cos\alpha \sin\zeta(x-a)}{\zeta} + O(|\zeta|^{-2} e^{|\eta|(x-a)}).$$

同样若 $\sin\beta \neq 0$，则

$$\psi(x, \zeta^2) = \sin\beta \cos\zeta(x-b) + O(|\zeta|^{-1} e^{|\eta|(b-x)}),$$

若 $\sin\beta = 0$，则

$$\psi(x, \zeta^2) = -\frac{\cos\beta \sin\zeta(x-b)}{\zeta} + O(|\zeta|^{-2} e^{|\eta|(b-x)}).$$

类似地我们可以证明，若 $\sin\alpha \neq 0$，有

$$\phi'(x, \zeta^2) = -\zeta \sin\alpha \sin\zeta(x-a) + O(e^{|\eta|(x-a)}),$$

若 $\sin\alpha = 0$，有

$$\phi'(x, \zeta^2) = -\cos\alpha \cos\zeta(x-a) + O(|\zeta|^{-1} e^{|\eta|(x-a)}),$$

以及若 $\sin\beta \neq 0$ 则

$$\psi'(x, \zeta^2) = -\zeta \sin\beta \sin\zeta(x-b) + O(e^{|\eta|(b-x)}),$$

若 $\sin\beta = 0$，则

$$\psi'(x, \zeta^2) = -\cos\beta \cos\zeta(x-b) + O(|\zeta|^{-1} e^{|\eta|(b-x)}).$$

基于上述结果，易证：若 $\sin\alpha \sin\beta \neq 0$，则

$$w(\lambda) = \zeta \sin\alpha \sin\beta \sin\zeta(b-a) + O(e^{|\eta|(b-a)}),$$

如果 $\sin\alpha$ 或 $\sin\beta$ 为零，则有相似公式。为了缩短证明

[注] 记号 $g(z) = O(f(z))(z \to z_0)$ 表示在 z_0 的某个 ε-邻域内 $|g(z)| \leqslant K|f(z)|$，其中 K 是常数。

并得出主要的结果，我们仍将考虑 $\sin\alpha\sin\beta\neq 0$ 的 情形。其他三种情形，读者可以补充其细节。

为了完成证明，我们沿闭曲线 C_n 积分，非齐次方程(a)的唯一解是 $y(x,\lambda)$，微分方程右端的函数设为 $f(x)$，C_n 如图 7.7.1 描述。

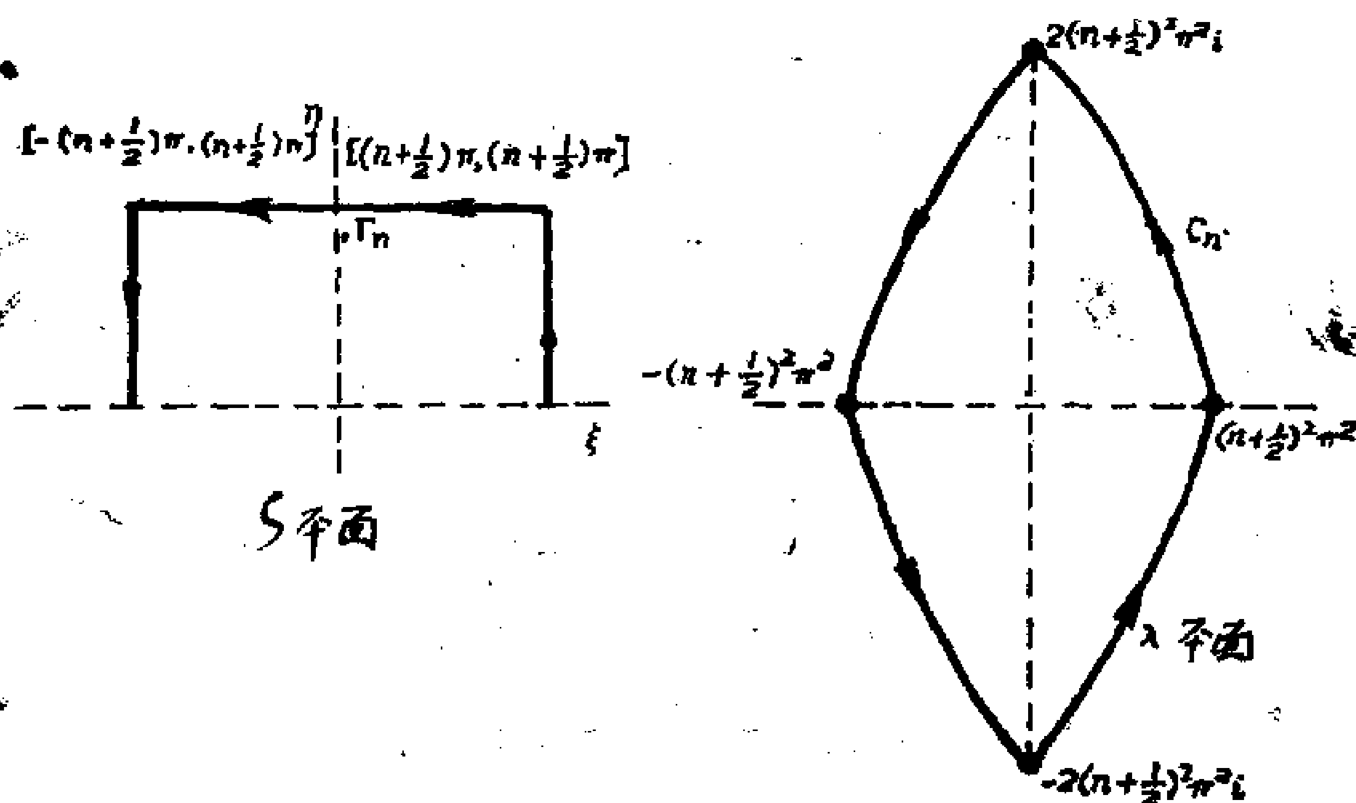


图 7.7.1

ζ—平面图上的线路由变换 $\lambda=\zeta^2$ 映射为 λ—平面上的线路 C_n. 我们已经证明

$$y(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\int_a^x\phi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{\phi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\times\int_a^b\psi(t,\lambda)f(t)\,dt.$$

在 Γ_n 上，$\eta\geqslant 0$ 且 $|\sin\zeta(b-a)|>Ke^{\eta(b-a)}$，这里 K 是常数。因此，

$$\frac{1}{w(\lambda)}=\frac{1}{\zeta\sin\alpha\sin\beta\zeta(b-a)}[1+O(|\zeta|^{-1})].$$

这就证明了，当 n 充分大，C_n 不通过 $w(\lambda)$ 的任何零点。利用上面所提供的 $\phi(x,\lambda)$ 与 $\psi(x,\lambda)$ 的估值，则有

$$\frac{\psi(x,\lambda)\phi(t,\lambda)}{w(\lambda)}=\frac{\cos\zeta(b-x)\cos\zeta(t-a)}{\zeta\sin\zeta(b-a)}+O(|\zeta|^{-2}e^{\eta(t-x)}),$$

$$\frac{\phi(x,\lambda)\psi(t,\lambda)}{w(\lambda)}=\frac{\cos\zeta(b-t)\cos\zeta(x-a)}{\zeta\sin\zeta(b-a)}+O(|\zeta|^{-2}e^{\eta(x-t)}).$$

故

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=&\int_a^x\frac{\cos\zeta(b-x)\cos\zeta(t-a)}{\zeta\sin\zeta(b-a)}f(t)dt\\&+\int_x^b\frac{\cos\zeta(b-t)\cos\zeta(x-a)}{\zeta\sin\zeta(b-a)}f(t)dt\\&+O(|\zeta|^{-2}\int_a^x e^{\eta(t-x)}f(t)dt)\\&+O(|\zeta|^{-2}\int_x^b e^{\eta(x-t)}f(t)dt).\end{aligned}$$

如果我们暂时忽略最后两项（我们将要证明这两项沿 C_n 积分当 $n\to\infty$ 趋于零），则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}y(x,\lambda)d\lambda$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\Big[\int_a^x\frac{\cos\zeta(b-x)\cos\zeta(t-a)}{\xi\sin\zeta(b-a)}f(t)dt+\int_x^b\frac{\cos\zeta(b-t)\cos\zeta(x-a)}{\zeta\sin\zeta(b-a)}f(t)dt\Big]d\lambda$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt+\frac{2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{b-a}(x-a)$$

$$\times\int_a^b \cos\frac{n\pi}{b-a}(t-a)f(t)\,dt,$$

这里，我们已经计算了被积函数在所有极点处的留数之和。等号右边的级数正是 $f(x)$ 的余弦 Fourier 级数（参看 8.1 节）。

这个级数在 $f(x)$ 的给定的条件下，我们知道它收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$. 剩下要证明的是其余的项沿 C_n 的积分，当 $n\to\infty$ 时趋于零，设 $0<\delta<x-a$，则

$$\int_{C_n} O\left[\,|\zeta|^{-2}\int_a^x e^{\zeta(t-x)}f(t)\,dt\right]d\lambda$$

$$=O\left\{\int e^{-\delta\eta}\,|\zeta|^{-1}\,|d\zeta|\right\}+O\left\{\int_{x-\delta}^{x}|f(t)|\,dt\right\}$$

若选取 δ 很小可以使最后一积分任意地小，而其项的性态如下：

$$O\left\{\frac{1}{n}\int_0^{(2n+1)\pi/2(b-a)} e^{-\delta\eta}d\eta\right\}$$

$$+O\left\{\frac{1}{n}\int_0^{(2n+1)\pi/2(b-a)}\exp\left[-\frac{(2n+1)\pi\delta}{2(b-a)}\right]d\xi\right\}$$

$$=O\left(\frac{1}{n\sigma}\right)+O\left[\exp\left(-\frac{(2n+1)\pi\delta}{2(b-a)}\right)\right],$$

这对于充分大的 n 是任意地小，这就完成了定理 7.7.4 的证明。

推论 7.7.4. 设 $f(x)$ 是满足定理 7.7.4 的条件的一个函数，且 $\lambda\neq\lambda_k, k=1,2,3,\cdots$，这里 λ_k 为对应齐次 Sturm-Liouville 问题的特征值，那么如果 $y(x,\lambda)$ 是 $y''+[\lambda-q(x)]y=f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的解，且满足适当的边界条件，则

$$y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k\Phi_k(x)}{\lambda-\lambda_k},$$

这里 $c_k=\int_a^b f(x)\Phi_k(x)\,dx$，而 $\Phi_k(x)$ 是规范化的特征征函数。

证明 我们已经正明了

$$y(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\int_a^x\phi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{\phi(x,\lambda)}{w(\lambda)}\times\int_x^b\psi(t,\lambda)f(t)\,dt,$$

从这里可以证明 y 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 内是连续可微分的，这表示 $y(x,\lambda)$ 有一 Sturm-Liouville 展开式

$$y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\Phi_k(x),$$

这里

$$b_k=\int_a^b y(x,\lambda)\Phi_k(x)\,dx.$$

而且

$$\begin{aligned}c_k&=\int_a^b f(x)\Phi_k(x)\,dx=\int_a^b[y''+(\lambda-q)y]\Phi_k(x)\,dx\\&=[y'\Phi_k-y\Phi_k']_a^b+\int_a^b[\Phi_k''+(\lambda-q)]y\,dx\\&=\int_a^b[\Phi_k''+(\lambda_k-q)\Phi_k]y\,dx+(\lambda-\lambda_k)\int_a^b y\Phi_k\,dx\\&=(\lambda-\lambda_k)b_k.\end{aligned}$$

故 $b_k=c_k/(\lambda-\lambda_k)$.

如果 $\lambda=\lambda_k$ 对其某些 k 成立，则 $y''+(\lambda_k-q)y=f(x)$ 有解的必要条件是 $f(x)$ 与 $\Phi_k(x)$ 正交。事实上，因假设这问题有一个解 y，因此

$$c_k=\int_a^b f(x)\Phi_k(x)\,dx=\int_a^b [y''+(\lambda_k-q)y]\Phi_k dx$$

$$=[y'\Phi_k-y\Phi_k']_a^b+\int_a^b [\Phi_k''+(\lambda_k-q)\Phi_k]y dx=0.$$

反之，如果 $\lambda=\lambda_k$ 而且 $f(x)$ 与 $\Phi_k(x)$ 正交，那么由于 $c_k=0=(\lambda-\lambda_k)b_k$ 对于任意的 b_k 是满足的，故存在一解

$$y(x,\lambda_k)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{c_j\Phi_j(x)}{\lambda_k-\lambda_j}+b_k\Phi_k(x),$$

这里 b_k 是任意的，因此在这种情况下存在解，但它不是唯一的。

习　　题 7.7

1. 将 Sturm-Liouville 方程从第一个形式变为第二形式

$$(e^{-3x}y')'+\lambda e^{-3x}y=f(x),\quad \ddot{u}+[\lambda-q(t)]u=g(t).$$

2. 试求问题 $y''+\lambda y=f(x), y(0)=y(\pi)=0$ 的展开定理的形式。

3. 试求问题 $(xy)'+\lambda xy=f(x), y(1)=y(2)=0$，的展开定理的形式。

7.8 Fredholm 积分方程

研究 Sturm-Liouville 问题的另一个方法是通积分方程。为了说明这一点，让我们考虑下面的在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非齐次 Sturm-Liouville 问题开始：

$$(py')'-qy+\lambda\rho y=-f(x),$$
$$\cos\alpha y(a)+\sin\alpha y'(a)=0,$$
$$\cos\beta y(b)+\sin\beta y'(b)=0.$$

我们假设问题是正则的，这就是说，p 是連续可微的，q

与ρ是連续的，f是逐段連续的，$p>0$及$\rho>0$，且a与b是有限的。开始时假设$\lambda=0$不是对应齐次问题($f\equiv 0$)的一个特征值。于是由定理7.7.1方程$(py')'-qy=-f(x)$有唯一的一个满足相同边界条件的解。我们可以确定这个解如下：令$\phi(x)$与$\psi(x)$是$(py')'-qy=0$的解且满足

$$\phi(a)=\sin\alpha,\qquad \phi'(a)=-\cos\alpha,$$

$$\psi(b)=\sin\beta,\qquad \psi'(b)=-\cos\beta.$$

由定理7.7.2 $\phi(x)$与$\psi(x)$存在且是唯一的，同时还是线性无关的。我们知道有

$$\cos\alpha\phi(a)+\sin\alpha\phi'(a)=0,$$

$$\cos\beta\psi(b)+\sin\alpha\psi'(b)=0.$$

我们应用常数变易法寻求非齐次问题的解。设

$$y(x)=A(x)\phi(x)+B(x)\psi(x),$$

$$y'(x)=A\phi'+B\psi'+A'\phi+B'\psi.$$

令 $A'\phi+B'\psi=0$，于是

$$(py')'=A(p\phi')'+B(p\psi')'+A'p\phi'+B'p\psi',$$

$$(py')'-qy=A'p\phi'+B'p\psi'=-f.$$

解出A'与B'得

$$A'=\frac{f(x)\psi(x)}{p(x)(\phi\psi'-\psi\phi')},\qquad B'=\frac{-f(x)\phi(x)}{p(x)(\phi\psi'-\psi\phi')}.$$

这里分母是常数，这是因为

$$\frac{d}{dx}[p(\phi\psi'-\psi\phi')]=\phi(p\psi')'-\psi(p\phi')'=0.$$

故

$$A=\frac{1}{k}\int_{c_1}^{x}f(t)\psi(t)dt$$

$$B=-\frac{1}{k}\int_{c_2}^{x}f(t)d(t)dt,$$

从而

$$y(x)=\frac{\phi(x)}{k}\int_{c_1}^{x}f(t)\psi(t)\,dt-\frac{\psi(x)}{k}\int_{c_2}^{x}f(t)\phi(t)\,dt,$$

$$y'(x)=\frac{\phi'(x)}{k}\int_{c_1}^{x}f(t)\,\psi(t)\,dt-\frac{\psi'(x)}{k}\int_{c_2}^{x}f(t)\phi(t)\,dt,$$

$$\cos\alpha y(a)+\sin\alpha y'(a)=[-\cos\alpha\psi(a)-\sin\alpha\psi'(a)]$$
$$\times\int_{c_2}^{a}f(t)d(t)\,dt=0.$$

因为方括号内不能为零，故$\int_{c_2}^{a}f(t)\phi(t)\,dt=0$，同样

$$\cos\beta y(b)+\sin\beta y'(b)=[\cos\beta\phi(b)+\sin\phi'(b)]$$
$$\times\int_{C1}^{b}f(t)\psi(t)\,dt=0.$$

故$\int_{c_1}^{b}f(t)\psi(t)\,dt=0$，因此，$y(x)$ 的结果是

$$y(x)=-\frac{\psi(x)}{k}\int_{a}^{x}f(t)\phi(t)\,dt-\frac{\phi(x)}{k}\int_{x}^{b}f(t)\psi(t)\,dt$$

这可写成如下形式：

$$y(x)=\int_{a}^{b}G(x,t)f(t)\,dt,$$

这里 Green 函数 $G(x,t)$ 定义为

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\psi(x)\phi(t)}{k}, & a\leqslant t\leqslant x,\\[2ex] -\dfrac{\phi(x)\psi(t)}{k}, & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

如果把 Green 函数看作 t 的函数，对于参数 x 的每个固定的值都有定义，容易验证它满足下面的性质：

1. $(pG')' - qG = 0$，$a < t < x$ 及 $x < t < b$.

2. G 在 $t = x$ 时是连续的。

3. $\cos\alpha G(a) + \sin\alpha G'(a) = 0, \cos\beta G(b) + \sin\beta G'(b) = 0$.

4. $G'(x, x^+) - G'(x, x^-) = -1/p(x)$.

定理 7.8.1. 如果我们取性质 1—4 作为 Green 函数的定义性质，则 $G(x,t)$ 唯一被确定的充要条件是 $\lambda = 0$ 不是上面定义的齐次 Sturm-Liouville 问题的特征值。

证明 如果 $\lambda = 0$ 不是特征值，则函数 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 唯一地被确定，而且线性无关。于是

$$G(x,t) = A\phi(t) + B\psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant x,$$

$$G(x,t) = C\phi(t) + D\psi(t), \quad x \leqslant t \leqslant b.$$

并且

$$\cos\alpha G(x,a) + \sin\alpha G'(x,a) = B(\cos\alpha\psi(a) + \sin\alpha\psi'(a)) = 0,$$

$$\cos\beta G(x,b) + \sin\beta G'(x,b) = C(\cos\beta\phi(b) + \sin\beta\phi'(b)) = 0.$$

因此 $B = C = 0$. 又 $G(x, x^+) = G(x, x^-)$，这意味着 $A\phi(x) = D\psi(x)$，即 $G'(x, x^+) - G'(x, x^-) = -1/p(x)$ 表示有

$$\frac{A\phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)} - A\phi'(x) = -1/p(x).$$

因此，有

$$A = \frac{-\psi(x)}{p(x)(\phi\psi' - \psi\phi')} = -\frac{\psi(x)}{k},$$

$$D = -\frac{\phi(x)}{k}.$$

故

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\psi(x)\phi(t)}{k}, & a\leqslant t\leqslant x,\\ -\dfrac{\phi(x)\psi(t)}{k}, & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

如果 $\lambda=0$ 是齐次问题的一个特征值，则方程 $(py')'-qy=0$ 有一满足边界条件的連续可微的非平凡解 $u(x)$. 这样对于任意常数 c，$G(x,t)+cu(t)$ 满足性质1—4，因此 G 不是唯一的。事实上，有这种情况下，不存在满足性质1—4的函数 $G(x,t)$. 这时所发生的事是：在满足性质1—3时，们我产生一个特征函数，它有連续的导数，因而不满足性质4。在这种情况下，我们可以定义一个广义 Green 函数，它满足一个更一般的微分方程。这个概念将在习题中引入。

我们可以证明：每当 $G(x,t)$ 存在时，那么

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt$$

就是非齐次问题的解。这可直接验证，因为

$$y(x)=-\frac{\phi(x)}{k}\int_x^b\psi(t)f(t)\,dt-\frac{\psi(x)}{k}\int_a^x\phi(t)f(t)\,dt$$

$$=A(x)\phi(x)+B(x)\psi(x),$$

这里 $A'\phi+B'\psi=0$ 及 $A'p\phi'+B'\rho\psi'=-f$. 边界条件也是容易验证的。

现在转到方程 $(py)'-qy+\lambda\rho y=-f$ 中 $\lambda\neq0$ 的情形。我们将这方程写作

$$(py')'-qy=-f-\lambda\rho y$$

且应用 Green 函数 $G(x,t)$. 则有积分方程

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt+\lambda\int_a^b\rho(t)G(x,t)y(t)\,dt.$$

乘以 $\sqrt{\rho(x)}$，则有

$$\sqrt{\rho(x)}y(x)=\int_a^b[\sqrt{\rho(x)\rho(x)}\,G(x,t)f(t)/\sqrt{\rho(t)}\,]dt$$

$$+\lambda\int_a^b\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\,G\,(x,t)\,\sqrt{\rho(t)}y(t)dt.$$

设　$K(x,t)=\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\,G(x,t)$，$u(x)=\sqrt{\rho(x)}\,y(x)$以及

$$F(x)=\int_a^b[\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\,G(x,t)f(t)/\sqrt{\rho(t)}\,]dt,\text{则}$$

$$u(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt.$$

这称做 Fredholm 积分方程。

对于 x 的某些值我们可以用迭代法解这积分方程如下。设 $u_0(x)$ 为 $F(x)$，则

$$u_1(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt,$$

………………………………………………

$$u_n(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)dt,$$

可以按递推的定义下去，而

$$u_1-u_0=\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt,$$

$$|u_1-u_0|\leqslant|\lambda|\,MN(b-a),$$

这里$M=\max|K(x,t)|$，及$N=\max|F(x)|$．又

$$u_2-u_1=\lambda\int_a^b K(x,t)[u_1(t)-u_0(t)]dt,$$

$$|u_2-u_1|\leqslant|\lambda|^2NM^2(b-a)^2.$$

由归纳法可以证明

$$|u_n-u_{n-1}|\leqslant|\lambda|^nNM^n(b-a)^n.$$

考虑级数 $F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_{n-1}(x)]$，这个级数在$|\lambda|<[M(b-a)]^{-1}$时对于$x$是一致收敛的。因此在积分方程中代入级数并且逐项积分，有

$$F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\left\{F(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(t)-u_{n-1}(t)]\right\}dt$$

$$=u_0(x)+u_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}),$$

这是由于上面两个级数收敛于同一个和。

容易看出这个解是唯一的。设$H[f]=\int_a^b K(x,t)f(t)dt$，则有$H^2[f]=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)f(t_2)dt_1dt_2$等等。于是我们的近似序列是

$$u_0(x)=F(x),$$

$$u_1(x)=F(x)+\lambda H[F],$$

$$u_2(x)=F(x)+\lambda H[F]+\lambda^2H^2[F],$$

$$\cdots\cdots,$$

$$u_n(x)=F(x)+\lambda H[F]+\lambda^2H^2[F]+\cdots+\lambda^nH^n[F].$$

如果我们一开始从其他连续函数迭代，比如说$\widetilde{F}$，则

$$u_0(x)=\widetilde{F}(x),$$

$$u_1(x)=F(x)+\lambda H[\widetilde{F}],$$

$$u_2(x)=F(x)+\lambda H[F]+\lambda^2H^2[\widetilde{F}],$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_n(x)=F(x)+\lambda H[F]+\lambda^2H^2[F]+\cdots+\lambda^{n-1}H^{n-1}[F]+\lambda^nH^n[\widetilde{F}].$$

显然两级数收敛于同一个和。换言之，开始进行迭代时，连续

函数选择完全是任意的．设

$$u(x)=F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n H^n[F],$$

并设$\widetilde{u}(x)$是积分方程的另一个解，则

$$u_1(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\widetilde{u}(t)dt$$

$$=F(x)+H[\widetilde{u}]=\widetilde{u}(x),$$

$$u_2(x)=F(x)+\lambda H[F]+\lambda^2 H^2[\widetilde{u}]=\widetilde{u}(x),$$

等等。因此，$u(x)=\widetilde{u}(x)$，这就正明了解的唯一性。

回想起原 Sturm-Liouville 问题仅当 λ 不是齐次问题的一个特征值时有一个唯一的解，这样，我们就证明了不存在这样的特征值，它的模小于$[M(b-a)]^{-1}$，这里 $M=\max|k(x,t)|$．

我们也看到，我们的级数解当 $|\lambda|\leqslant r[M(b-a)]^{-1}$ 时．对于 λ 是一致收敛。因此

$$u(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x,\lambda)-u_{n-1}(x,\lambda)]$$

对于 $|\lambda|<[M(b-a)]^{-1}$ 是 λ 的一个解析函数。

设

$$K^1(x,t)=K(x,t);\quad K^2(x,t)=\int_a^b K(x,t_1)K(t_1 t)dt_1;$$

$$K^3(x,t)=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)K(t_2,t)dt_1 t_2;\quad\cdots;$$

$$K^n(x,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t)dt_1\cdots dt_{n-1},$$

现在让我们定义所谓“互易核”为

$$k(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K^n(x,t).$$

我们已经看到这个级数当 $|\lambda|<M(b-a)^{-1}$ 对于 x 与 t 是一致

收敛的而且是 λ 的解析函数，又我们可以将积分方程的解写作

$$u(x)=F(x)+\lambda\int_a^b k(x,t,\lambda)F(t)\,dt.$$

容易证明，互易核满足积分方程

$$k(\xi,t,\lambda)=K(\xi,t)+\lambda\int_c^b k(x,t,\lambda)K(\xi,x)\,dx.$$

反之，如果我们能够找到一个满足这个积分方程的互易核，那么可以证明

$$u(x)=F(x)+\lambda\int_a^b k(x,t,\lambda)F(t)\,dt$$

满足原来的 Fredholm 方程，这是因为

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b K(\xi,x)u(x)\,dx &= \lambda\int_a^b F(x)K(\xi,x)\,dx\\ &\quad+\lambda^2\int_a^b\int_a^b k(x,t,\lambda)F(t)K(\xi,x)\,dt\,dx\\ &=\lambda\int_a^b F(x)K(\xi,x)\,dx+\lambda\int_a^b[k(\xi,t,\lambda)-K(\xi,t)]F(t)\,dt\\ &=\lambda\int_a^b k(\xi,t,\lambda)F(t)\,dt=u(\xi)-F(\xi).\end{aligned}$$

级数表示式 $k(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K^n(x,t)$ 在 $|\lambda|<[M(b-a)]^{-1}$ 内是成立的。$k(x,t,\lambda)$ 可以解延拓到 λ 平面上，除去齐次问题的特征值之外的其他地方去，设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\cdots$ 是特征函数 $\phi_1(x)$，$\phi_2(x),\phi_3(x),\cdots$，所对应的特征值，满足

$$\phi_i(x)=\lambda_i\int_a^b K(x,t)\phi_i(t)\,dt,$$

$$\int_a^b\phi_i\phi_j\,dx=\delta_{ij}$$

可以证明[注]

[注] 参看：R柯朗与D希尔伯特：数学物理方法I.134—138页（有中译本）。

$$K^n(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(x)\phi_i(t)}{\lambda_i^n},$$

$n=2,3,4,\cdots$，而收敛对于 x 与 t 是一致的。因此，若

$$|\lambda|\leqslant r<[M(b-a)]^{-1},$$

$$k(x,t,\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(t)\phi_i(t)}{\lambda_i^n}$$

$$=K(x,t)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{\lambda_i^n}\right)\phi_i(x)\phi_i(t)$$

$$=K(x,t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(x)\phi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i-1)}.$$

这个关系式对于小的 $|\lambda|$ 已经证明，而且我们现在可以看出最后的方程对一切 $\lambda\neq\lambda_i, i=1,2,\cdots$，都定义了 $k(x,t,\lambda)$，容易证明它满足积分方程，这是因为

$$K(\xi,t)+\lambda\int_a^b K(\xi,x)[K(x,t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(x)\phi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}]dx$$

$$=K(\xi,t)+\lambda K^2(\xi,t)+\lambda^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\xi)\phi_i(t)}{\lambda_i^2(\lambda_i-\lambda)}$$

$$=K(\xi,t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\xi)\phi_i(t)}{\lambda_i^2}+\lambda^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\xi)\phi_i(t)}{\lambda_i^2(\lambda_i-\lambda)}$$

$$=K(\xi,t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(\xi)\phi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}=k(\xi,t,\lambda).$$

我们注意到 $k(x,t,\lambda)$ 是一个 λ 的半纯函数，其极点在特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\cdots$处。定理5.5.4告诉我们它可以表示为两个整函数的比。这些整函数能表示为无穷级数，即通常所说的Fredholm行列式的级数[注]。在这里我们不准备进一步讨论这个题目。

[注] 参看：J.W.Dettman：物理与工程的数学方法 246-256 页。

习 题 7.8

1. 试求与问题 $y''+\lambda y=-f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $y(0)=y(1)=0$，相联系的 Fredholm 积分方程。

2. 试求与问题 $(xy')'+\lambda xy=-f(x)$, $1\leqslant x\leqslant e$, $y(1)=y(e)=0$相关系的 Fredholm 积分方程。

3. 证明这一节的性质 1—4 不能定义关于问题 $y''+\lambda y=-f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $y'(0)=y'(1)=0$的 Green 函数。试求一广义 Green 函数满足

i) $G''=1$, $0\leqslant t<x$, $x<t\leqslant 1$;

ii) G在$t=x$处是連续的;

iii) $G'(0)=G'(1)=0$;

iv) $G'(x,x^+)-G'(x,x^-)=-1$;

v) $G(x,t)=G(t,x)$.

证明：用这个广义 Green 函数能做一个伴随的 Fredholm 积分方程。

4. 考虑 Sturm-Liouvile 问题 $[(1-x^2)y']'+\lambda y=-f(x)$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y(-1)$ 与 $y(1)$是有限的，证明：$\lambda=0$是齐次问题的特征值，其对应的特征函数为 $\phi_0(x)=1/\sqrt{2}$. 证明本节性质 1—4 不定义这个问题的 Green 函数。如果 v 是 $[(1-x^2)v']'+\lambda v=0$ 的解，$\lambda\neq 0$, $v(-1)$与 $v(1)$ 是有限的，证明$\int_{-1}^{1}\phi_0 v\,dx=0$。由于这个正交性，我们可以做出关于 v 的 Fredholm 积分方程

$$v(t)=\lambda\int_{-1}^{1}G(x,t)v(t)dt,$$

这里 $G(x,t)$ 满足

i) $[(1-t^2)G']'-A\phi_0(t)=0$, $-1\leqslant t<x$, $x<t\leqslant 1$;

ii) G 在 $t=x$ 处是连续的；

iii) $G(-1)$ 与 $G(1)$ 为有限；

iv) $G'(x,x^+)-G'(x,x^-)=-1/(1-x^2)$；

v) $G(x,t)=G(t,x)$.

试求常数 A 并求 $G(t,x)$.

5. 若 $K(x,t)$ 不是对称的，即 $K(x,t)\neq K(t,x)$，齐次 Fredholm 方程 $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt$ 可能没有特征值。证明当 $K(x,t)=\sin x\cos t$，$a=0$，$b=\pi$ 就是这种情形。

6. 若核 $K(x,t)$ 是退化的，即是

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(x)\beta_n(x),$$

则 Fredholm 方程 $y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt$ 能用代数方法求解。对于 $N=2$ 时，试用这个方法求解。并给出解的存在与唯一性的判别法则，最后将互易核表为 λ 的有理函数。

第八章 Fourier 变换

8.1 Fourier 级数

这一章的主要目的是研究 Fourier 变换，特别是由它定义的在复平面内的解析函数，并考虑它对常微分方程，偏微分方程与积分方程解法的一些应用。但是从历史的发展与概念形成两方面来说，Fourier 级数均出现在先，由于读者可能对它们不熟悉，这一节将复习一些关于 Fourier 级数的基本定理。

设 $f(t)$ 是定义在 $-\infty<t<\infty$ 上实数 t 的一个复变数函数，且以 2π 为周期；即是，对于任意 t，

$$f(t+2\pi)=f(t).$$

定义 8.1.1. 函数 $f(t)$ 在有限区间* $a\leqslant t\leqslant b$ 上是逐段連续的是指：当且仅当存在一个有限分割

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

使得 $f(t)$ 在每一个开区间 $t_{k-1}<t<t_k$，$k=1,2,\cdots,n$ 内是連续的。并且每一个极限

$$\lim_{t\to a^+}f(t),\quad \lim_{t\to t_1^-}f(t),\quad \lim_{t\to t_1^+}f(t),\cdots\cdots$$

及 $\lim\limits_{t\to b^-}f(t)$ 都存在。

我们列出关于逐段連续函数很明显的一些事实不予证明。

1. 一个函数在 $[a,b]$ 上連续则在该区间上是逐段連续的。

---

* 从现在起用簡略号 $[a,b]$ 代表闭区间。

2. 在 $[a,b]$ 上两个逐段连续函数的和，差、积在 $[a,b]$ 上是逐段连续的。

3. 一个函数在 $[a,b]$ 上逐段连续则它在 $[a,b]$ 上是有界的，

4. 在 $[a,b]$ 上逐段连续函数的定积分存在并且

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt.$$

5. 积分 $\int_a^t f(u)du,\ a\leqslant t\leqslant b$ 存在并且在 $[a,b]$ 上是连续的。

定义 8.1.2. 函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上是逐段连续可微分是指：当且仅当它的导数 $f'(t)$ 在 $[a,b]$ 上除去有限个点外处处存在并且在 $[a,b]$ 上是逐段连续的。

如果 t_k 是在证明 $f'(t)$ 逐段连续时 $[a,b]$ 分割中一个分点，则 $\lim\limits_{t\to t_k^-} f'(t)$ 与 $\lim\limits_{t\to t_k^+} f'(t)$ 存在. 这不是说 $f(t)$ 在 t_k 处的左导数与右导数存在，因为下面的极限可能都不存在

$$\lim_{t\to t_k^-}\frac{f(t)-f(t_k)}{t-t_k},$$

$$\lim_{t\to t_k^+}\frac{f(t)-f(t_k)}{t-t_k}.$$

例如由图 8.1.1 画出的函数. 但是，如果 $f(t)$ 是逐段连续与逐段可微的，则极限

$$\lim_{t\to t_k^-}\frac{f(t)-f(t_k^-)}{t-t_k}=f'(t_k^-),$$

$$\lim_{t\to t_k^+}\frac{f(t)-f(t_k^+)}{t-t_k}=f'(t_k^+),$$

存在，其中 $f(t_k^-)=\lim\limits_{t\to t_k^-} f(t)$，$f(t_k^+)=\lim\limits_{t\to t_k^+} f(t)$. —

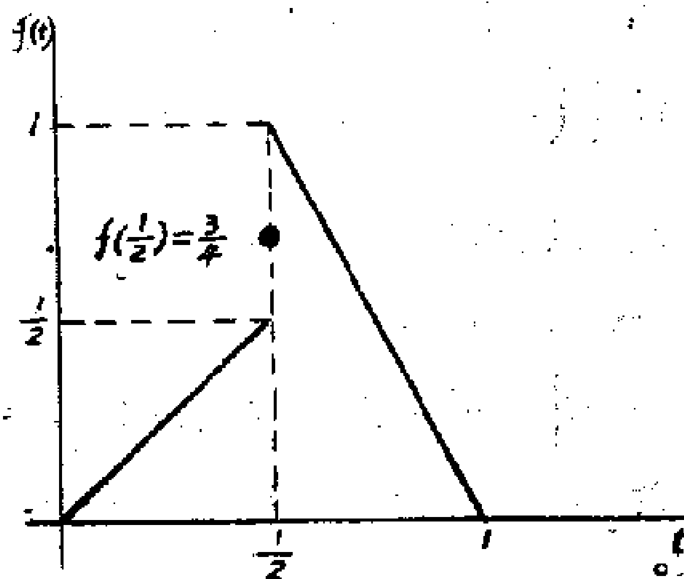


图 8.1.1

定理 8.1.1. 命 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上逐段連续，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_a^b f(t)\sin Rt\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_a^b f(t)\cos Rt\,dt=0.$$

证 不妨假设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上連续，因为我们总可以对于有限个子区间上函数是連续的情况来证明定理．命

$$t=\tau+\frac{\pi}{R},$$

则

$$\int_a^b f(t)\sin Rt\,dt=-\int_{a-\frac{\pi}{R}}^{b-\frac{\pi}{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{R}\right)\sin R\tau\,d\tau,$$

$$2\int_a^b f(t)\sin Rt\,dt=\int_a^b f(\tau)\sin R\tau\,d\tau-\int_{a-\frac{\pi}{R}}^{b-\frac{\pi}{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{R}\right)\sin R\tau\,d\tau$$

$$=-\int_a^{b-\frac{\pi}{R}}\left[f\left(\tau+\frac{\pi}{R}\right)-f(\tau)\right]\sin R\tau\,d\tau$$

$$+\int_{b-\frac{\pi}{R}}^{b} f(\tau)\sin R\tau\,d\tau-\int_{a-\frac{\pi}{R}}^{a} f\left(\tau+\frac{\pi}{R}\right)\sin R\tau\,d\tau,$$

如果 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(t)$ 是一致连续的，因此，可选 R 足够大使得 $\left|f\left(\tau+\frac{\pi}{R}\right)-f(\tau)\right|<\frac{\epsilon}{(b-a)}$ 对于 $[a,b]$ 中的一切 τ 成立，还可以选 R 这样大使得 $\frac{\pi}{R}<\frac{\epsilon}{2M}$，其中 $|f(t)|<M$ 在 $[a,b]$ 内成立，所以

$$2\left|\int_a^b f(t)\sin Rtdt\right|<\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)+\frac{M\epsilon}{2M}+\frac{M\epsilon}{2M}=2\epsilon.$$

由于 ϵ 是任意的，这就完成了第一个极限的证明，对于另一极限可同样证明。

定义 8.1.3. $f(t)$ 的 Fourier 系数是

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt \quad 与 \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt,$$

$k=0,1,2\cdots$，倘若这些积分存在的话。

推论 8.1.1. 如果 $f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段连续，则

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=0.$$

证：这从定理 8.1.1 可直接推出，

定理 8.1.2. 如果 $f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段连续，则

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)$$

收敛。

证明

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right|^2dt,$$

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt-\pi\left[\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^2+|b_k|^2)\right].$$

这是由著名的三角函数正交性：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mt dt = \pi, \qquad m = 1, 2, \cdots$$

得来。于是我们证明了

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

但是这个不等式成立与 n 无关，所以，我们有 Bessel's 不等式

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,$$

这就证明了无穷级数的收敛性。

定理 8.1.3. 如果 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在任意有限区间内是连续的与逐段连续可微分，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 |a_k|^2 + k^2 |b_k|^2)$$

收敛。

证明 因为 $f'(t)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上逐段连续，则有

$$\frac{|\alpha_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

其中 $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt dt, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt dt.$

由于 $f(t)$ 的连续性及周期性，$f(-\pi) = f(\pi)$，且

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt dt$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}f(t)\cos kt\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt=kb_k,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\sin ktdt$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}f(t)\sin kt\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt=-ka_k.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2|a_k|^2+k^2|b_k|^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt.$$

这证明了级数收敛。

定理 8.1.4. 如果$f(t)$是以2π为周期的周期函数，且在任何有限区间内是连续的与逐段連续可微分，则 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

在任意有限区间内一致收敛于$f(t)$。

证明 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_n\sin kt)$$

则

$$|S_{n+p}-S_n|^2=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k\cos kt+b_n\sin kt)\right|^2$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(ka_k\frac{\cos kt}{k}+kb_k\frac{\sin kt}{k}\right)\right|^2$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}(k^2|a_k|^2+k^2|b_k|^2)\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}.$$

这个不等式是由 Cauchy-Schwarz 不等式而来（参看习题 1.3.9）. 因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛，故对于一切正整数 p 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}=0.$$

这就证明了对于一切正整数 p，当 $n\to\infty$ 时，$|S_{n+p}-S_n|\to 0$. 这是关于 Fourier 级数一致收敛性的 Cauchy 判别法，这就证明级数收敛于一个連续函数，但还要证明这个函数就是 $f(t)$.

再考虑 S_n，有

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-\tau)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}e^{ik(t-\tau)}-\frac{1}{2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(n+1)(t-\tau)}-1}{e^{i(t-\tau)}-1}-\frac{1}{2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)}-e^{\frac{-i(t-\tau)}{2}}}{e^{\frac{i(t-\tau)}{2}}-e^{\frac{-i(t-\tau)}{2}}}-\frac{1}{2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)-\cos\frac{t-\tau}{2}+i\sin\frac{t-\tau}{2}}{2i\sin\frac{t-\tau}{2}}-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)}{\sin\frac{t-\tau}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(u+\tau)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+\tau)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

这里用了 $f(t)$ 的周期性，此外还有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu\right]du=f(t).$$

因此，

$$|S_n-f(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(u+t)-f(t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(u+t)-f(t)]\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin nu\,du\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(u+t)-f(t)]\cos nu\,du\right|$$

命 n 趋于无穷，由定理 8.1.1，右端两个积分趋向于零。这里用 $f'(t)$ 的逐段连续性可得

$$\lim_{u\to 0^-}\frac{[f(u+t)-f(t)]\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$=\lim_{u\to 0^-}\left[\frac{f(u+t)-f(t)}{u}\right]\frac{u\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=2f'(t^-),$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{[f(u+t)-f(t)]\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{f(u+t)-f(t)}{u}\right]\frac{u\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=2f'(t^+).$$

因为已证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}Sn=f(t)$，这就完成了证明。

推论 8.1.2. 如果 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在任何有限区间内是连续的与逐段连续可微分，则

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt.$$

证明 根据 Fourier 级数一致收敛于 $f(t)$ 的性质，可用 $\frac{1}{\pi}f(t)$ 相乘然后逐项积分。

定理 8.1.5. 如果 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且是逐段连续与逐段连续可微分，则 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)].$$

证明 我们设函数除在 $\pm 2n\pi$，$n=0,1,2\cdots$ 处有间断点外而无其它间断点的情形下证明此定理，把此推证稍加推广，对于已给周期内的任意有限多个间断点，定理同样可证。

考虑函数

$$F(t)=f(t)-[f(0^+)-f(0^-)]g(t),$$

此处 $g(t)$ 是周期为 2π 的周期函数且在 $[-\pi,\pi]$ 内定义如下：

$$g(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}(\pi+t), & -\pi\leqslant t<0,\\ 0 & t=0,\\ \frac{1}{2\pi}(\pi-t), & 0<t\leqslant\pi.\end{cases}$$

现在 $g(t)$ 除去 $t=0$ 处是连续的，在 $t=0$ 处函数有一个跳跃量 1．已构造的函数 $F(t)$ 是处处连续的，这是由于

$$\lim_{t\to 0^-}F(t)=f(0^-)+\frac{1}{2}[f(0^+)-f(0^-)]=\frac{1}{2}[f(0^+)+f(0^-)],$$

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=f(0^+)-\frac{1}{2}[f(0^+)-f(0^-)]=\frac{1}{2}[f(0^+)+f(0^-)],$$

并且它不能有别的间断点。所以，$F(t)$ 有一个处处收敛于它的 Fourier 级数。如果能够证明 $g(t)$ 有一个收敛于它的 Fourier 级数，那么我们就证明了 $f(t)$ 在它连续时收敛于 $f(t)$，并且在它的间断点收敛于

$$F(0)=\frac{1}{2}[f(0^+)+f(0^-)].$$

换句话说，在 $f(t)$ 不连续的地方它的 Fourier 级数收敛于它的左极限与右极限的平均值。剩下的是证明 $g(t)$ 有一个处处收敛于它的 Fourier 级数。

令

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ktdt \text{ 与 } d_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ktdt.$$

则

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}g(t)\cos ktdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(t)\cos ktdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(-t)\cos ktdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(t)\cos ktdt=0,$$

$$k=0,1,2\cdots,$$

$$d_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}g(t)\sin ktdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(t)\sin ktdt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(-t)\sin ktdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}g(t)\sin ktdt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2\pi}(\pi-t)\sin ktdt=\frac{1}{\pi k},\qquad k=1,2,3,\cdots.$$

于是 $g(t)$ 的 Fourier 级数是 $\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}$，运用简单的判别法可以证明它是收敛的，还必须证明它收敛于 $g(t)$。

考虑 $G(t)=g(t)(1-\cos t)$ 它是处处連续的。$G(t)$ 的 Fourier 级数在每个闭区内一致收敛于它自己，其系数为：

$$\gamma_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(t)\cos ktdt=0,\qquad k=0,1,2,\cdots,$$

$$\delta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)(1-\cos t)\sin ktdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ktdt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)[\sin(k+1)t+\sin(k-1)t]dt$$

$$=d_k-\frac{1}{2}(d_{k+1}+d_{k-1}),\qquad k=1,2,3,4,\cdots,$$

在这里我们已假定 $d_0=0$。

令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}d_k\sin kt$，则

$$(1-\cos t)S_n=\sum_{k=1}^{n}d_k(1-\cos t)\sin kt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[d_k-\frac{1}{2}(d_{k+1}+d_{k-1})\right]\sin kt$$

$$=\sigma_n+\frac{1}{(n+1)\pi}\sin nt-\frac{1}{n\pi}\sin(n+1)t$$

此处 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\sin kt$，所以

$$|S_n-g(t)|\leqslant\frac{|\sigma_n-G(t)|+\frac{2}{n\pi}}{|1-\cos t|}$$

并且如果 $t\neq\pm 2m\pi$，$m=0,1,2,\cdots$ 时，由于当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_n\to G(t)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=g(t)$．当 $t=\pm 2m\pi$，$m=0,1,2,\cdots$ 时，对于一切 k，$\sin kt=0$．因此，

$$S_n(\pm 2m\pi)=0\text{ 及 }0=\lim_{n\to 0}S_n(\pm 2m\pi)=g(\pm 2m\pi).$$

这就完成了证明。

定理 8.1.6. 令 $f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是逐段连续的，则

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt$$

与

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$$

存在并且形式 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$ 可以逐项积分，即是，积分了的级数收敛于

$$\int_{-\pi}^{t}f(\tau)d\tau,\qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi.$$

证明 如果形式地积分级数，得级数

$$\frac{a_0}{2}(t+\pi)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kt-\frac{b_k}{k}\cos kt+\frac{(-1)^k b_k}{k}\right).$$

现在，考虑函数 $G(t)=\int_{-\pi}^{t}f(\tau)d\tau-\frac{a_0}{2}(t+\pi)$．很清楚，$G(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是连续的且逐段连续可微分，因为

$$G'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}.$$

而且 $G(-\pi)=0$ 与

$$G(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau-\pi a_0=0.$$

故

$$G(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt),$$

此处对于 $k=1,2,3,\cdots$,

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos kt\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left.\frac{G(t)\sin kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\sin kt\,dt$$

$$=-\frac{b_k}{k}.$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin kt\,dt$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left.\frac{G(t)\cos kt}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\cos kt\,dt$$

$$=\frac{a_k}{k}.$$

所以,

$$G(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kt-\frac{b_k}{k}\cos kt\right),$$

$$G(\pi)=\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}b_k=0,$$

$$\int_{-\pi}^{t} f(\tau)\,d\tau-\frac{a_0}{2}(t+\pi)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k b_k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\cos kt-\frac{b_k}{k}\sin kt\right),$$

$$\int_{-\pi}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{a_0}{2}(t+\pi)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\cos kt-\frac{b_k}{k}\sin kt+\frac{(-1)^k b_k}{k}\right)$$

就证明形式地积分的级数收敛于 $\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau$。注意，此结果与形式级数收敛与否无关。

习　题　8.1

1．命 $f(t)$ 是以 $2L$ 为周期的周期函数，它在 $[-L,L]$ 上逐段连续，并且有逐段连续的导数。证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi t}{L}+b_k\sin\frac{k\pi t}{L}\right),$$

这里

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{k\pi t}{L}dt,\qquad b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{k\pi t}{L}dt.$$

2．命 $f(t)$ 是以 $2L$ 为周期的周期函数，它在 $[-L,L]$ 上逐段连续，且有逐段连续的导数，证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{k\pi}{L}t},$$

其中

$$C_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-i\frac{k\pi}{L}t}dt.$$

3．命 $f(t)$ 是以 $2L$ 为周期的周期函数，它在 $[-L,L]$ 上逐段连续，且有逐段连续的导数，设 $f(t)$ 是奇函数，即是 $f(-t)=-f(t)$。证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi t}{L},$$

其中

$$b_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{k\pi t}{L}dt.$$

4. 命 $f(t)$ 是以 $2L$ 为周期的周期函数，它在 $[-L, L]$ 上是逐段連续的，且有逐段連续的导数。若 $f(t)$ 是偶函数，卽是 $f(-t)=f(t)$。证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi t}{L}+\frac{a_0}{2},$$

其中

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{k\pi t}{L}dt.$$

5. 命 $f(t)=t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$. 求收斂于 $f(t)$ 的 Fourier 级数且在区间 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 上具有如下性质：

(a) 只含 $\cos kt$ 项，$k=0,1,2,\cdots$;

(b) 只含 $\sin kt$ 项，$k=1,2,3,\cdots$;

(c) 包含 $\cos 2kt$ 与 $\sin 2kt$ 项，$k=0,1,2,\cdots$;

(d) 包含 $\cos kt$ 与 $\sin kt$ 项，$k=0,1,2,\cdots$.

$t=0$ 及 $t=\pi$ 时这些级数收斂于什么？

6. 证明，如果 $f(t)$ 是周期的連续的且有逐段連续的一阶与二阶导数，则除去 $f'(t)$ 的间断点外它的导数可由它的 Fourier 级数逐项微分计算出来。

7. 证明，如果 $f(t)$ 是周期的且有直到 $(n-1)$ 阶的連续导数与逐段連续的 n 阶导数，则它的 Fourier 系数具有如下性质：

$$\lim_{k\to\infty}k^n a_k=0,\qquad \lim_{k\to\infty}k^n b_k=0.$$

8.2 Fourier 积分定理

在习题 8.1.1 及 8.1.2 中知道如果 $f(t)$ 以 $2L$ 为周期的周期

函数，它在 $[-L,L]$ 上逐段连续，且有逐段连续的导数，则

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{\frac{ik\pi t}{L}},$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(\tau)e^{-\frac{ik\pi\tau}{L}}d\tau.$$

把 c_k 代入上式，有

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2L}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(\tau)e^{\frac{ik\pi}{L}(t-\tau)}d\tau.$$

如果 $f(t)$ 不是周期函数，则我们不能希望对于一切 t 值可用 Fourier 级数表示它，然而，作为纯碎形式的方法可以考虑当半周期 L 趋于无穷时的指数形式，令

$$x_k=\frac{k\pi}{L} \quad 与 \quad G(x_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}f(\tau)e^{-ix_k\tau}d\tau.$$

则

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-L}^{L}f(\tau)e^{-ix_k\tau}d\tau\right)e^{ix_kt}\ (x_{k+1}-x_k)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(x_k)\,e^{ix_kt}\ \Delta x_k.$$

当 $L\to\infty$ 时，$\Delta x_k\to 0$，如果不考虑一切困难，我们得到

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{ixt}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-ix(\tau-t)}d\tau dx.$$

这是 Fourier 定理的形式叙述，现在我们对于相当大一类函数严格证明它。

我们从证明一个重要引理开始。

引理 8.2.1. 如果 $f(t)$ 是逐段連续的并且在任意有限区间

中有逐段连续的导数且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ 存在，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-T}^{T}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau=\frac{\pi}{2}[f(t^{+})+f(t^{-})],$$

其中T可以是有限的或无限的。

证明 先就T为有限的来证明。分区间为四部分，有

$$\int_{-T}^{T}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau$$

$$=\int_{-T}^{-\delta}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau+\int_{-\delta}^{0}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau$$

$$+\int_{0}^{\delta}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau+\int_{\delta}^{T}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau,$$

$$=\int_{\delta}^{T}f(t-\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau+\int_{0}^{\delta}f(t-\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau$$

$$+\int_{0}^{\delta}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau+\int_{\delta}^{T}f(t-\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau.$$

我们又有如下关系：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{\sin Rt}{t}dt=\lim_{R\to 0}\int_{0}^{R\delta}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau=\frac{\pi}{2}.$$

故

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-T}^{T}f(t+\tau)\,\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau-\frac{\pi}{2}[f(t^{+})+f(t^{-})]$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_{\delta}^{T}\frac{f(t-\tau)}{\tau}\sin R\tau d\tau+\lim_{R\to\infty}\int_{\delta}^{T}\frac{f(t+\tau)}{\tau}\sin R\tau d\tau$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{f(t-\tau)-f(t^{-})}{\tau}\sin R\tau d\tau$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{f(t+\tau)-f(t^{+})}{\tau}\sin R\tau d\tau$$

由定理 8.1.1 这些极限每一个都是零，在前两个中用到函数的逐段连续性，在后两个中用到导数的逐段連续性。

考虑 $T=\infty$ 的情形。我们只需注意对于充分大的 S，对于任意 $\epsilon>0$，有

$$\int_S^\infty \left|\frac{f(t)\sin Rt}{t}\right| dt \leqslant \int_S^\infty |f(t)|\, dt < \epsilon,$$

$$\int_{-\infty}^{-S} \left|\frac{f(t)\sin Rt}{t}\right| dt \leqslant \int_{-\infty}^{-S} |f(t)|\, dt < \epsilon.$$

定理 8.2.1. Fourier 积分定理 命 $f(t)$ 是逐段連续的并且在任何有限区间有一个逐段連续的一阶导数，命 $f(t)$ 是绝对可积的，即 $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\, dt$ 存在。则

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\, e^{ix(t-\tau)} dx\, d\tau$$

这里对于 x 的积分是在 Cauchy 的主值意义下。

证明 首先注意 $\int_{-\infty}^\infty |f(\tau)\, e^{-ix\tau}|\, d\tau = \int_{-\infty}^\infty |f(\tau)|\, d\tau < \infty.$

故广义积分 $\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\, e^{-ix\tau} d\tau$ 对于 $[-R,R]$ 内的 x 是绝对收敛的与一致收敛的，于是由引理 8.2.1，得

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^R \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\, e^{ix(t-\tau)} d\tau\, dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\int_{-R}^R e^{ix(t-\tau)} dx\, d\tau$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\,\frac{\sin R(t-\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t+u)\,\frac{\sin Ru}{u} du = \frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)].$$

Fourier 积分定理可以写成如下形式，命

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-ix\tau}d\tau$$

为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，则如果 $f(t)$ 满足定理 8.2.1 的假设，

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{ixt}dx.$$

如果 $f(t)$ 连续并且用 $F[f]$ 表示 Fourier 变换，则

$$f(t)=F^{-1}\{F[f]\}.$$

这里 F^{-1} 表示逆变换 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{ixt}dt$.

例 8.2.1 求 $f(t)=e^{-|t|}$ 的 Fourier 变换并在这种情形检验 Fourier 积分定理。函数是

$$f(t)=\begin{cases}e^{t}, & t<0,\\ e^{-t}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

则

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t(1+ix)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+x^2}.$$

在此情形下，我们应用围道积分法求这个变换的逆。首先考虑 $t>0$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+x^2}e^{ixt}dx=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{c}\frac{e^{izt}}{1+z^2}dz.$$

其中 c 是图 8.2.1 中新的围道，在 $z=i$ 处有一个简单极点，倘若能够证明当 $R\to\infty$ 时沿半园弧的围道积分趋于零，则由留数定理

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{1+x^2}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-t}}{2\pi i}\right)=e^{-t},$$

令 $z=Re^{i\theta}$，当 $R\to\infty$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}}e^{it(R\cos\theta+iR\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right|\leqslant\frac{R}{|R^2-1|}\to 0.$$

对于 $t<0$，我们选取在 x 轴之下的半园弧作围道，则在简单极点 $z=i$ 处的留数为 $-\frac{e^t}{2\pi i}$ 但是在此情形下沿逆时针方向积分给出逆变换的负数。因此，欲求的结果是 $2\pi i\frac{e^t}{2\pi i}=e^t$. 如果 $t=0$，可直接积分，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}x\Big|_{-\infty}^{\infty}=1.$$

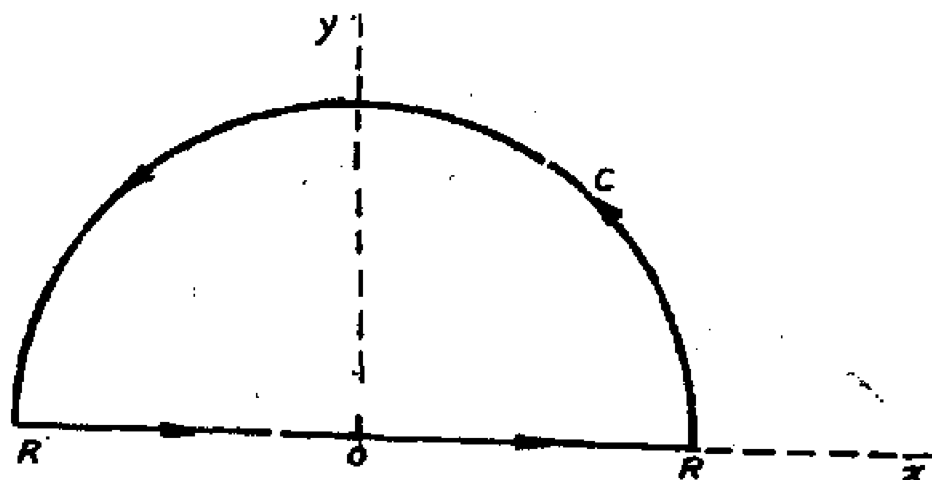


图 8.2.1

定理 8.2.2. 如果 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是满足定理 8.2.1 的假设的两个复値函数，并且有相同的 Fourier 变换，则这两个函数在任何有限区间中只能在有限多个点处不同。

证明 由假设

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-ixt}dt,$$

并且由定理 8.2.1

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{g(t^+)+g(t^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{ixt}dx.$$

在 $f(t)$ 与 $g(t)$ 均是連续的点，$f(t)=g(t)$. 在任何有限区间内只能有有限多个点而在这些点处 $f(t)$ 或 $g(t)$ 是间断的。在这些点处，并仅在这些点处，$f(t)$ 与 $g(t)$ 可能不同。

习　题　8.2

1. 求函数 $f(t)=e^{-at}$，$t\geqslant 0$; $f(t)=0$，$t<0$，的 Fourie.变换，其中 $a>0$，由直接积分法检验逆变换公式。注意变换不是绝对可积的，虽然它是平方可积。

2. 证明 $F[e^{-\frac{x^2}{2}}]=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. 试证，如果 $f(t)$ 是实的并且满足定理8.2.1的条件，则

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\tau(t-x)\,dx\,d\tau.$$

如果 $f(t)$ 是偶函数，证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos t\tau\int_0^{\infty}f(x)\cos x\tau\,dx\,d\tau.$$

如果 $f(t)$ 是奇函数，证明

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin t\tau\int_0^{\infty}f(x)\sin x\tau\,dx\,d\tau.$$

注意：$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos xt\,dt$ 叫做 Fourier 余弦变换，而 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin xt\,dt$ 叫做 Fourier 正弦变换。

8.3 复 Fourier 变换

在 Fourier 积分定理中我们是与绝对可积的函数打交道，

即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$. 这是一个相当严格的限制，它意味着，例如，像 1，$\sin t$，$\cos t$，e^t 等等函数都沒有 Fourier 变换，在试图消除这个限制中我们导出 Fourier 变换一种推广，把变换看成是复变量 z 的一个函数。

考虑一个复值函数 $f(t)$ 它是連续的并且在任何有限区间內有逐段連续的导数。设 $g(t)=e^{yt}f(t)$ 对于某些 y 是绝对可积的。则

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-ix\tau}d\tau dx$$

$$e^{yt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\tau(x+yi)}d\tau dx,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(x+yi)}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\tau(x+iy)}d\tau dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy}e^{itz}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\tau z}d\tau dz,$$

这里在 z 平面內的积分是沿着直线 $x+iy$, 其中 y 固定，而 $-\infty<x<\infty$，它使得 $f(t)e^{yt}$ 是绝对可积的，更一般地，有下面的定理：

定理 8.3.1. 设 $f(t)$ 是一个复值函数，它是逐段連续的，并且在任何有限区间內有一个逐段連续的导数，设 $f(t)e^{\gamma t}$ 对于某些实值 γ 是绝对可积的。则

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}e^{itz}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\tau z}d\tau dz,$$

这里在复平面內的积分是沿着直线 $x+i\gamma$，$-\infty<x<\infty$.

我们定义 $f(t)$ 的 Fourier 变换如：

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\tau z}d\tau.$$

如果 $f(t)$ 满足定理 8.3.1 的假设，则逆变换是

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} e^{itz}G(z)\,dz,$$

其中 γ 为某实数。

定理 8.3.2. 设 $f(t)$ 是一逐段连续的函数使得

$$|f(t)|\leqslant Ke^{-bt},\quad 0\leqslant t<\infty,$$

与 $$|f(t)|\leqslant Me^{-at},\quad -\infty<t\leqslant 0,\quad a<b,$$

则对于 $a<I_m(z)<b$，$f(t)$ 的 Fourier 变换存在并且是 z 的一个解析函数，又

$$G'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[-i\tau f(\tau)]e^{-i\tau z}d\tau.$$

证明 这是例 4.9.1 的结果。由定理 4.9.4

$$G'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}[e^{-i\tau z}f(\tau)]d\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[-i\tau f(\tau)]e^{-i\tau z}d\tau.$$

例 8.3.1. 试求 $f(t)=\sin\omega t$，$0\leqslant t<\infty,\omega>0$；$f(t)=0$，$-\infty<t\leqslant 0$ 的复 Fourier 变换并且检验逆变换。因为 $|f(t)|\leqslant 1$，$0\leqslant t<\infty$，及 $|f(t)|=0$，$-\infty<t\leqslant 0$，我们可取 $b=0$ 与 $a=-\infty$。因此，变换对于 $-\infty<I_m(z)<0$ 是解析的。

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)e^{-izt}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega-z}-\frac{1}{\omega+z}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\omega}{\omega^2-z^2}.$$

事实上，$\frac{\omega}{\sqrt{2\pi}}(\omega^2-z^2)$ 在扩充的 z 平面内除去 $z=\pm\omega$ 外都是解析的。因此，这个函数是 Foarier 变换到平面的其余部分的解析延拓。命 $\gamma<0$，如果 $t>0$ 用围道积分计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}dz=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}dz,$$

这里C是图 8.3.1 中的围道。

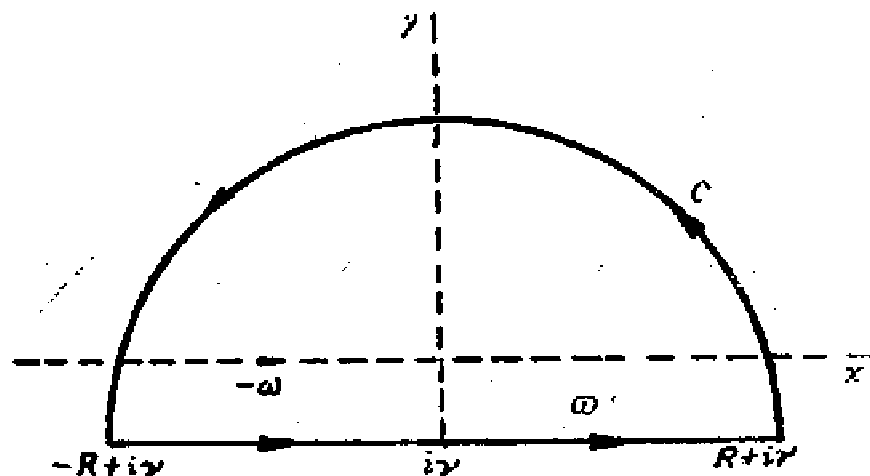


图 8.3.1

在围道内有两个极点，倘若能够证明沿半园弧的积分值在R趋于无穷时向零跑的话，由留数定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}dz=i\left(\frac{\omega e^{i\omega t}}{2\omega}-\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2\omega}\right)=\sin\omega t$$

在半园围道 $z=i\gamma+Re^{i\theta}$ 上，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，及

$$|e^{izt}|=|e^{-\gamma t}\ e^{itR(\cos\theta+i\sin\theta)}|=e^{-\gamma t}\ e^{-tR\sin\theta}\leqslant e^{-\gamma t}.$$

因此，在围道的这部分上，当 $R\to\infty$ 时，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}dz\right|\leqslant\frac{\omega e^{-\gamma t}}{2\pi}\ \frac{\pi R}{(R-\gamma)^2-\omega^2}\to0.$$

如果 $t\leqslant0$ 我们用在 x 轴之下的半园封闭围道，因为在围道内沒有极点其结果为零。又在半园弧 $z=i\gamma+Re^{i\theta},\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上，当 $R\to\infty$ 时，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}dz\right|\leqslant\frac{\omega e^{-\gamma t}}{2\pi}\ \frac{\pi R}{(R-\gamma)^2-\omega^2}\to0.$$

在例 8.3.1 中，容易看出，对于任何 $\gamma<0$ 反演可以实

行。换言之，不管在下半平面中用什么样的平行于实轴的直线作为积分围道，逆变式给出原函数，是不奇怪的因为 $e^{\gamma t}f(t)$ 对于任何负值 γ 是绝对可积的，所以倘若它是负的由定理 8.3.1 反演不应依赖于 γ．事实上，对定理 8.3.1 能够叙述一个明显的推论。

推论 8.3.1. 设 $f(t)$ 是逐段连续的并且在任何有限区间内有一个逐段连续的导数。设 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，及 $|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t\leqslant 0$，$a<b$. 则 $e^{\gamma t}f(t)$ 对于 $a<\gamma<b$ 是绝对可积的，并且在 $f(t)$ 的 Fourier 变换的解析带形域之内，反演积分能被沿着任何直线 $x+i\gamma$，$-\infty<x<\infty$ 计算。

现在我们能提出如下的问题：如果我们在一条带形域 $a<I_m(z)<b$ 内定义的任何函数 $G(z)$ 解析，怎么知道它当一个 Fourier 变换？显然，我们需要比在带形域内解析的条件更为多的条件以保证函数是一个 Fourier 变换。我们能易于得到关于函数是一个 Fourier 变换的必要条件。

定理 8.3.3. 设 $f(t)$ 在任何有限区间内是逐段连续的。命 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，$|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t<\infty$，$a<b$. 则 $G(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt$ 在每条带

$$a<\rho_1\leqslant I_m(z)\leqslant\rho_2<b$$

内是有界的。

证明

$$|G(z)|\leqslant\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{(y-b)t}dt+\frac{M}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{(y-a)t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{K}{b-y}+\frac{M}{y-a}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{K}{b-\rho_2}+\frac{M}{\rho_1-a}\right).$$

定理 8.3.4. 设 $f(t)$ 是連续的并且在任何有限区间内有逐段連续的导数。命 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$|f'(t)|\leqslant K'e^{-b't}$，

$0 \leqslant t < \infty$; $|f(t)| \leqslant Me^{-at}$, $|f'(t)| \leqslant M'e^{-a't}$, $-\infty < t < \infty$, $a' < a < b < b'$. 则在带形域 $a < I_m(z) < b$ 内，有一常数 N 使得 $|G(z)| \leqslant N/|z|$.

证明 在假设下，$f'(t)$ 的 Fourier 变换存在并且在带形域 $a' < I_m(z) < b'$ 内是解析的。在此带内可分部积分如下：

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-izt} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{yt} (\cos xt - i \sin xt) dt$$

$$= \frac{-y + ix}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{yt} (\cos xt - i \sin xt) dt$$

$$= \frac{iz}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt} dt = izG(z).$$

在带形域 $a < I_m(z) < b$ 内，$H(z)$ 是有界的。因而有一 N 使得 $|H(z)| \leqslant N$，与 $|G(z)| \leqslant \dfrac{N}{|z|}$.

如果对于使 $a < r < b$ 的某一 r 能够计算反演积分，则有一函数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ri}^{\infty+ri} G(z) e^{izt} dz。$$

因此我们能够研究 $f(z)$ 的性质与计算，如果可能的话，它的 Fourier 变换

$$G^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt} dt.$$

如果 $G^*(z) = G(z)$，则 $G(z)$ 必是一函数的 Fourier 变换，它与 $f(t)$ 在任何有限区间内只能在有限多个点处不同。

在另一方面，如果我们建立已知函数的一个 Fourier 变换表，则我们对所给函数能够查表。如果在表内找到，则我们知

道一个已知函数的 Fourier 变换就有了。在下一节中我们将进一步研究 Fourier 变换的性质并且动手建立一个已知 Fourier 变换的表。

习　题 8.3

1．　试求 $e^{-|t|}$ 的复 Fourier 变换并证明它对于

$$-1<I_m(z)<1$$

是解析的，并用围道积分推导逆变换公式。

2．　试求 $u(t)\cos\omega t$ 的复 Fourier 变换，其中 $t\geq 0$ 时 $u(t)=1$ 而对于 $t<0$ 时 $u(t)=0$，证明对于 $I_m(z)<0$ 变换是解析的。并用围道积分推导逆变换公式。

3．　证明 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的复 Fourier 变换是 $e^{-\frac{z^2}{2}}$。

4．　设 $G(z)=-\frac{-i}{\sqrt{2\pi}z}$，对于 $r>0$ 与 $\gamma<0$ 计算

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}G(z)e^{izt}dz,$$

解释其结果。

5．　设 $G(z)$ 对于 $a<I_m(z)<b$ 是解析的。假设对于任何的 ρ_1 与 ρ_2 使得 $a<\rho_1<I_m(z)<\rho_2<b$ 存在 N 使得 $|G(z)|\leq\frac{N}{|z|}$。证明如果 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}G(z)e^{izt}dz$ 对于满足 $a<r<b$ 的某个 r 存在的话，则积分值与 r 无关系，只要它满足相同的不等式。

6．　假设仅考虑如下函数类 $f(t)$ 对于 $-\infty<t<0$ 时，使得 $f(t)=0$，则

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{-izt}dt$$

称为单边 Fourier 变换。如果 $f(t)$ 是逐段连续的并且满足

$|f(t)| \leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，证明 $G(z)$ 在一半平面 $I_m(z)<b$ 内是解析的。

8.4 Fourier变换的性质

在这一节里将讨论 Fourier 变换的一些重要性质同时建立已知函数的变换的一个短表。

定理 8.4.1. Fourier 变式是线性的；即是，如果 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在带形域 $a<I_m(z)<b$ 内是两个具有 Fourier 变式的解析函数，并且 c_1 与 c_2 是任何复数，则

$$F[c_1f_1+c_2f_2]=c_1F[f_1]+c_2F[f_2].$$

证明

$$F[c_1f_1+c_2f_2]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]e^{-izt}dt$$

$$=\frac{c_1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-izt}dt$$

$$+\frac{c_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt$$

$$=c_1F[f_1]+c_2F[f_2].$$

定理 8.4.2. 如果 $f(t)$ 是一个具有一个 Fourier 变换 $F[f(t)]$ 的函数，则 $F[f(t-z)]=e^{-i\tau z}F[f(t)]$.

证明

$$F[f(t-\tau)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)e^{-izt}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iz(\tau+u)}du$$

$$=e^{-iz\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-izu}du$$

$$=e^{-iz\tau}F[f(t)].$$

定理 8.4.3. 设 $f(t)$ 是具有 Fourier 变换的一个函数，在

带形域 $a<I_m(z)<b$ 内解析。命K是一个$\neq 0$的实常数。如果 $K>0$，则 $F[f(Kt)]=G(z/K)/|K$ 在带形域$Ka<I_m(z)<Kb$ 内解析，又如果 $K<0$，则它在带形域 $Kb<I_m(z)<Ka$ 内解析，

证明

$$F[f(Kt)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(Kt)e^{-izt}dt$$

$$=\frac{1}{|K|\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)^{-i(z,K)u}du$$

$$\frac{1}{|K|}G\left(\frac{z}{K}\right).$$

如果 $G(z)$ 对于 $a<I_m(z)<b$ 是解析的，则 $G(z/K)$ 对于 $a<I_m(z)<b$，或 $Ka<I_m(z)<Kb$ $(K>0)$ 内是解析的；或在 $Kb<I_m(z)<Ka$ $(K<0)$内是解析的。

定理 8.4.4. 设$f(t)$是連续的并且在任何有限区间内有逐段連续的导数。设 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$|f'(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，$|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$|f'(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t\leqslant 0, a<b$. 则$F[f]$与$F[f']$在带 $a<I_m(z)<b$ 内是解析的，这里$F[f']=izF[f]$.

证明 在带形域 $a<I_m(z)<b$ 内，变式$F[f']$存在并且可分部积分如下，

$$F[f']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-izt}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{yt}(\cos xt-i\sin xt)dt$$

$$=\frac{-y+ix}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{yt}(\cos xt-i\sin xt)dt$$

$$=\frac{iz}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt=izF[f].$$

定理 8.4.5. 设 $f^{(K)}(t), K=0,1,2,\cdots, n-1$，是连续的且 $f^{(n)}(t)$ 是逐段连续的。命 $|f^{(K)}(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，$|f^{(K)}(t)|\leqslant Me^{-bt}$，$-\infty<t\leqslant 0$，$K=0,1,2,\cdots,n$. 则 $F[f^{(n)}]=(iz)^n F[f]$.

证明 由定理 8.4.4,

$$F[f^{(n)}]=izF[f^{(n-1)}]=(iz)^2F[f^{(n-2)}]=\cdots=(iz)^nF[f].$$

定理 8.4.6. 设 $f(t)$ 是逐段连续的并且满足 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，$|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t\leqslant 0$，$a<b$，则在带形域 $a<I_m(z)<b$ 内，

$$\frac{d^n}{dz^n}F[f]=(-i)^nF[t^nf(t)],$$

$n=1,2,3,\cdots$。

证明 $F[f]$ 在带形域内是解析的，因而我们可以在积分号下微分所需要的若干多次。故

$$\frac{d}{dz}F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-izt}dt=(-i)F[tf(t)],$$

$$\frac{d^2}{dz^2}F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-it)^2f(t)e^{-izt}dt=(-t)^2F[t^2f(t)],$$

等等。

定理 8.4.7. 设 $f(t)$ 在任何有限区间内是逐段连续的。命 $h(t)=\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$. 命 $h(t)$ 与 $h'(t)=f(t)$ 满足定理 8.4.4 的假设。则 $F[h]=F[f]/iz$.

证明 由定理 8.4.4，$F[f]=izF[f']=izF[h]$.

在定理 8.4.4 与 8.4.7 中我们看出微分一函数与积分一函数的变换结果，微分有变换乘以 iz 的效果，而积分有变换除以 iz 的效果。依照变换，于是我们用代数运算代替微分运算。这在解微分方程与解积分方程中是根本重要的，在后面应用中将会

知道。

在 Fourier 变换理论中有一种积分起着特殊的作用。设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是逐段连续的并且满足不等式 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$|g(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，$|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$|g(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t\leqslant 0$，$a<b$. 则有一个 r，满足 $a<r<b$，使得 $e^{rt}f(t)$ 与 $e^{rt}g(t)$ 是绝对可积的。命

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

我们叫 $h(t)$ 为 f 与 g 的卷积，记为 $h=f*g$. 容易证明 $e^{rt}h(t)$ 是逐段连续且绝对可积的。令 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 为一区间，在此区间中 $f(t)$ 是连续的，如果需要的话我们可重新定义 $f(t_1)=f(t_1^+)$ 与 $f(t_2)=f(t_2^-)$。现在，对于此区间中的 t，$e^{r(t-\tau)}|f(t-\tau)|$ 关于 t 是一致有界的。设 $e^{r(t-\tau)}|f(t-\tau)|\leqslant N$，则由于

$$e^{rt}h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r(t-\tau)}f(t-\tau)\,e^{r\tau}g(\tau)\,d\tau,$$

与

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{r(t-\tau)}|f(t-\tau)|\,e^{r\tau}|g(\tau)|\,d\tau\leqslant N\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}|g(\tau)|\,d\tau,$$

积分是一致收敛的。所以，$e^{rt}h(t)$ 对于 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 是连续的。但是对于使 $f(t)$ 在其中连续的任何有限区间这个推证可能重复。

为证 $e^{rt}h(t)$ 是绝对可积的我们推论如下：

$$\int_{-R}^{R}e^{rt}|h(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}|g(\tau)|\int_{-R}^{R}e^{r(t-\tau)}|f(t-\tau)|\,dt\,d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}|g(\tau)|\int_{-R-\tau}^{R-\tau}e^{ru}|f(u)|\,du\,d\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}|g(\tau)|\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{ru}|f(u)|\,du<\infty$$

取变换我们有

$$F[e^{rt}h(t)]=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r(t-\tau)}f(t-\tau)e^{r\tau}g(\tau)e^{-izt}d\tau dt$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}g(\tau)\int_{-R}^{R}e^{r(t-\tau)}f(t-\tau)e^{-izt}dtd\tau$$

$$=\lim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}g(\tau)e^{-iz\tau}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}e^{ru}f(u)e^{-izu}dud\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{r\tau}g(\tau)e^{-iz\tau}d\tau\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ru}f(u)\ e^{-izu}du$$

$$=F[e^{r\tau}g(t)]F[e^{r\tau}f(t)],$$

这里方程对于 $a-r<I_m(z)<b-r$ 成立。现在如果 $G(z)=F[f]$ 对于 $a<I_m(z)<b$ 是解析的，则

$$F[e^{r\tau}f(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it(z+ir)}dt=G(z+ir)$$

对于 $a<I_m(z+ir)<b$ 是解析的，即 $a-r<I_m(z)<b-r$，故做平移 $z+ir\to z$ 后，我们有方程 $F[h]=F[f]F[g]$ 对于 $a<I_m(z)<b$ 是正确的。这也证明了 $F[h]$ 在同一带形域内是解析的。

我们举几个例说明如何运用这些性质以决定初等函数的变换来结束这一节。

例 8.4.1. 设 $u(t)=1, 0\leqslant t<\infty$ 及 $u(t)=0, -\infty<t\leqslant 0$，则若 $I_m(z)<0$ 时

$$F[u]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izt}dt=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}z}.$$

函数 $-i/\sqrt{2\pi}z$ 除去 $z=0$ 是解析的。故它是 $F[u]$ 对平面的其余部分解析延拓。用反演积分反转变换，必需取 $r<0$. 函数 $u(t)$ 是单位阶梯函数。

例 8.4.2. 设 $f(t)=u(t)t^n$， n 是一个正整数。则

$$f^{(k)}(t)=u(t)n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k},\quad k=1,2,3,\cdots,n,$$

如果 $k<n$，$f^{(k)}(t)$ 是连续的并且 $f^{(n)}(t)=n!n(t)$ 是逐段连续。故由定理 8.4.5

$$F[f^{(n)}(t)]=F[n!n(t)]=\frac{n!}{\sqrt{2\pi}iz}=(iz)^nF[f]$$

$$F[f(t)]=F[u(t)t^n]=\frac{n!}{\sqrt{2\pi}(iz)^{n+1}}.$$

例 8.4.3. 设 $f(t)=u(t)e^{kt}$，则

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{(k-iz)t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{iz-k},$$

倘若 $I_m(z)<-k$ 的话。

例 8.4.4. 设 $f(t)=u(t-\tau)e^{kt}$，则

$$f(t)=u(t-\tau)e^{k(t-\tau)}e^{k\tau}=e^{k\tau}g(t-\tau),$$

这里 $g(t)=u(t)e^{kt}$. 于是由定理 8.4.2 与例 8.4.3

$$F[f]=e^{k\tau}F[g(t-\tau)]=\frac{e^{k\tau}e^{-iz\tau}}{\sqrt{2\pi}(iz-k)}.$$

例 8.4.5. 设 $f(t)=u(t)\cos wt$，我们有

$$u(t)\sin wt=w\int_0^t u(t)\cos w\tau d\tau$$

并且从定理 8.4.7 与例 8.3.1,

$$F[u(t)\sin wt]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{w}{w^2-z^2}=\frac{w}{iz}F[u(t)\cos wt]。$$

所以,

$$F[u(t)\cos wt]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{iz}{w^2-z^2}.$$

例 8.4.6. 设 $f(t)=u(t)e^{-kt}\cos\omega t$。则

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \cos\omega t e^{-t(k+iz)}dt$$

$$=F[u(t)\cos\omega t]_{iz\to k+iz}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(k+iz)}{w^2(k+iz)^2}.$$

例 8.4.7. 设 $f(t)=tu(t)\sin\omega t$, 于是如果

$$g(t)=u(t)\sin wt,$$

则 $F[g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\omega}{\omega^2-z^2}$. 并由定理8.3.2

$$\frac{d}{dz}\ F[g]=\frac{w}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{2z}{(\omega^2-z^2)^2}=-iF[f],$$

$$F[f]=\frac{2iz\omega}{\sqrt{2\pi}(\omega^2-z^2)^2}。$$

例 8.4.8. 设 $F[f(t)]=\frac{1}{z(z^2-1)}$, 这里 $t<0$时$f(t)=0$.

试求 $f(t)$. 我们知道$F^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]=\sqrt{2\pi}iu(t)$ 及

$$F^{-1}\left[\frac{1}{z^2-1}\right]=-\sqrt{2\pi}u(t)\sin t.$$

所以，用卷积积分有

$$F^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2-1)}\right]=-i\sqrt{2\pi}u(t)\int_0^t\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=-i\sqrt{2\pi}u(t)[\cos(t-\tau)]_0^t$$

$$=-i\sqrt{2\pi}u(t)[1-\cos t].$$

另一个方法是展开$\frac{1}{z(z^2-1)}$为一部分分式

$$\frac{1}{z(z^2-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}.$$

于是 $A=\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^2-1}=-1$，$B=\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{2}$，与

$$C=\lim_{z\to -1}\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{2}.$$

由变式的线性性质

$$F^{-1}\left[\frac{-1}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\right]$$

$$=-i\sqrt{2\pi}u(t)\left[1-\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})\right]$$

$$=-i\sqrt{2\pi}u(t)[1-\cos t].$$

习 题 8.4

1. 证明 $F[u(t)t^{\alpha}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(iz)^{\alpha+1}}$ 其中 $\alpha>0$，及 $(iz)^{\alpha+1}$ 是定义为对于 $I_m(z)<0$ 的解析的一支。

2. 试求 $F[u(t)\cosh\omega t]$ 及 $F[u(t)\sinh\omega t]$.

3. 试求$F[u(t)t\sinh\omega t]$及 $F[u(t)t\cosh\omega t]$.

4. 试求$F[u(t-\tau)te^{\alpha t}]$，其中$\tau>0$.

5. 试求$F[u(t-\tau)te^{\alpha t}\sin\omega t]$，其中$\tau>0$.

6. 设 $f(t)=0$ 对于 $t<0$，试求 $f(t)$，如果

$$F[f]=\frac{1}{z(z^2-1)(z^2+1)}$$

的话。

8.5 常微分方程的解法

在这一节里我们将考虑 Fourier 变式的方法对解常微分方程的应用。考虑常系数线性 n 阶微分方程。

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=f(t).$$

假设 $f(t)$ 有一Fourier 变换 $F[f]$，于是取方程两边的变换，有

$$[a_n(iz)^n+a_{n-1}(iz)^{n-1}+\cdots+a_1(iz)+a_0]F[y]=F[f],$$

这里，$F[y]$是 y 的 Fourier 变换（如果它存在的话），故

$$F[y]=\frac{F[f]}{P(iz)},$$

这里 $P(D)=a_nD^n+a_{n+1}D^{n-1}t\cdots+a_1D+a_0$ 是微分方程左端的算子。让我们假设 $1/P(iz)$ 有一逆变式

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{e^{izt}}{P(iz)}dz.$$

应用卷积，有

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

如果用这种方法能够确定一个函数 $y(t)$，则我们容易检验它是不是微分方程一个解。或者，可以采用下面的定理：

定理 8.5.1. 设 $f(t)$是一个能应用Fourier 积分定理的連续函数，并且命 $G(z)=F[f]$ 在某带形域 $a<I_m(z)<b$ 内是解析的，设 $P(iz)$ 在此带中沒有零点，命

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}G(z)e^{izt}dz$$

对于滿足 $a<r<b$ 的某个 r 关于 t 一致收歛。则

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{G(z)e^{izt}}{P(iz)}dz$$

是微分方程

$$P(D)y=f(t)$$

的一个解。

证明 在所给假设下

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{G(z)e^{izt}}{P(iz)}dz$$

关于 t 一致收敛。故可以在积分号下关于 t 微分，且

$$a_1 Dy+a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{[a_1(iz)+a_0]G(z)e^{izt}}{P(iz)}dt.$$

同样，高阶导数存在并且有

$$P(D)y=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{P(iz)G(z)e^{izt}}{P(iz)}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}G(z)e^{izt}dz=f(t).$$

例 8.5.1. 试求 $L\frac{dI}{dt}+RI=E_0e^{-|t|}$，这里 L, R 与 E_0 是正常数。这是具有输入电压 $E_0e^{-|t|}$ 的 $L—R$ 串联电路中电流 I 所满足的方程。此处，函数 $f(t)=E_0e^{-|t|}$ 及 $G(z)=F[f]=\frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}(1+z^2)}$ 对于 $-1<I_m(z)<1$ 是解析的。$P(iz)=izL+R$ 在 $\frac{iR}{L}$ 处有一个零点。由定理 8.5.1

$$I(t)=\frac{E_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izt}}{(1+z^2)(izL+R)}dz.$$

它可由围道积分计算出来。设 $t>0$. 于是将上半平面中奇异点 i 与 $\frac{iR}{L}$ 的留数相加，有

$$I(t)=2E_0 i\left\{\frac{e^{-t}}{2i(R-L)}+\frac{e^{-\frac{Rt}{L}}}{iL\left(1-\frac{R^2}{L^2}\right)}\right\}$$

$$=E_0\left[\frac{e^{-t}}{R-L}+\frac{2Le^{-\frac{Rt}{L}}}{L^2-R^2}\right].$$

如果 $t<0$，必须在下半平面中封闭围路，因此，在 $-i$ 处的留数是唯一进入围路的。于是

$$I(t)=2E_0 i\frac{e^t}{2i(R+L)}=\frac{E_0 e_t}{R+L}.$$

在 $t=0$ 处，电流 $I(t)$ 是连续的因而

$$I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=\frac{E_0}{R+L}.$$

注意在这个例中解不是唯一的，因为齐次方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI=0$$

的一个解的任何倍数可以加入到方程的解的集合中去，函数 $e^{-\frac{Rt}{L}}$ 是此方程的唯一线性独立的解。由定理 7.2.1 则有下述方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E_0 e^{-t}$$

的唯一解，其中 $0<t$ 与 $I_0=\lim_{t\to 0}I(t)$。事实上，我们对于 $t<0$ 可取上面所得的解，加上一常数 C 乘以 $e^{-\frac{Rt}{L}}$，然后使之满足初始条件确定 C；即

$$I(t)=Ce^{-\frac{Rt}{L}}+E_0\left[\frac{e^{-t}}{R-L}+\frac{2Le^{-\frac{Rt}{L}}}{L^2-R^2}\right],$$

$$I_0=C+\frac{E_0}{R+L},$$

所以，

$$C=I_0-\frac{E_0}{R+L}$$

及

$$I(t)=I_0e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{E_0}{R-L}\left[e^{-t}-e^{-\frac{Rt}{L}}\right].$$

一个直接求得后面这个解的方法是用单边 Fourier 变换，即是，如果 $I(t)=0\ (t<0)$ 及 $\lim\limits_{t\to0}I(t)=I_0$，于是如果$F_+[f]$是单边 Fourier 变换

$$F_+[I]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty I(t)e^{-izt}dt,$$

$$F_+[I']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty I'(t)e^{-izt}dt.$$

$$=\frac{I(t)}{\sqrt{2\pi}}e^{-izt}\Big|_0^\infty+\frac{iz}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty I(t)e^{-izt}dt$$

$$=-\frac{I_0}{\sqrt{2\pi}}+izF_+[I].$$

变换微分方程，有

$$-\frac{I_0L}{\sqrt{2\pi}}+[(iz)L+R]F_+[I]=F_+[f]=G_+(z),$$

这里 $G_+(z)$是E_0e^{-t} 的单边变换，即

$$G_+(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty E_0e^{-t}e^{-izt}dt$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{1+iz}.$$

于是 $$F_+[I]=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{(izL+R)(1+iz)}+\frac{I_0L}{\sqrt{2\pi}(izL+R)}.$$

求它的变换，对于$t>0$，有

$$I(t)=\frac{E_0}{R-L}\left[e^{-t}-e^{-\frac{Rt}{L}}\right]+I_0e^{-\frac{Rt}{L}},$$

且 $I_0=\lim\limits_{t\to0^+}I(t)$.

我们看到单边Fourier变换比双边Fourier变换有某些优点，在那里可以有效地利用引进初始值因而得出微分方程的完全解。而且由于微分方程的右端对于$t<0$可以假设为零，我们发现许多简单函数如$u(t)\sin\omega t$, $u(t)\cos\omega t$, $u(t)e^{at}$, $u(t)t^n$,等等可以取做微分方程的输入，虽然$\sin\omega t$, $\cos\omega t$, e^{at}, t^n等等没有双边的Fourier变换。由于这些理由单边变式解常微分方程初始值问题时更为有效。但是传统上都用Laplace变换来做这种工作，将在下一章研究的Laplace变换，实际上是单边的Fourier变换，不过把iz换成z，即是，把复平面旋转$\frac{\pi}{2}$. 经此变换，变式在右半平面是解析的并且在正实轴大部分上存在。因此我们直到引进Laplace变换前，暂仃讨论常微分方程的解。

习　题 8.5

1. 用Fourier变换求$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=e^{-|t|}$的一个解。

2. 试求$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=u(t)\sin\omega t$对于$t>0$满足

$$\lim_{t\to0^+}y(t)=0 \quad 与 \quad \lim_{t\to0^+}\dot{y}(t)=1$$

的一个解。

3. 解积分微分方程

$$\frac{dy}{dt}+\int_0^t y(z)\,dz=e^{-t}$$

对于 $t>0$ 满足 $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=y_0$.

4. 在一个电感、电阻、电容的串联电路中电流 I 所满足的微分方程是

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt},$$

这里 L、R 及 C 都是正的常数而 $E(t)$ 是输入电压。设 $A(t)$ 是具有一单位阶梯输入电压的解，证明

$$I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\tau)A(t-\tau)d\tau$$

$A(t)$ 叫做导纳指数。

8.6 偏微分方程的解法

在这一节里我们考虑 Fourier 变式的方法对解某些偏微分方程的应用。

例 8.6.1. 试求一条无限长弹性弦的位移，它具有初始位移 $u(x,0)=f(x)$，且在一有限区间外为零，它有一初始速度 $u_t(x,0)=g(x)$，它在一有限区间外也为零。在微小位移的假设下问题可简述如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad -\infty<x<\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),$$

$$u_t(x,0)=g(x),$$

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,y)=0,\ t>0.$$

假设 $u(x,t)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都有关于变量 x 的 Fourier 变换，如果 $U(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-izx}dx$，则有

$$(iz)^2U(z,t)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$U(z,o)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-izx}dx=F(z),$$

$$U_t(z,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-izx}dx=G(z),$$

或

$$U_{tt}+a^2z^2U=0,$$

$$U(z,t)=A\sin azt+B\cos azt,$$

$$U(z,0)=B=F(z)。$$

$$U_t(z,0)=azA=G(z)。$$

故

$$U(z,t)=\frac{G(z)}{az}\sin azt+F(z)\cos azt$$

$$=\frac{G(z)}{2iaz}(e^{iazt}-e^{-iazt})+\frac{F(z)}{2}(e^{iazt}+e^{-iazt}).$$

应用反演积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}[F(z)e^{iz(x+at)}+F(z)e^{iz(x-at)}]dz$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}\frac{G(z)}{iz}[e^{iz(x+at)}-e^{iz(x-at)}]dz$$

$$=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)d\xi.$$

在得到这个结果中，已略去了许多细节，要点是一旦得到结果我们可以直接代入微分方程去检验。事实是，如果 f 是两次可微分而 g 是一次可微分的，容易验证这是一个解。读者应该完成这些细节。

例 8.6.2. 试求一条无限均匀棒的温度分布，如果初始温度是 $u(x,0)=f(x)$，它在一有限区间外为零。问题可简述如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t)=0.$$

假设 $u(x,t)$ 与 $f(x)$ 关于变量 x 有 Fourier 变换，则有

$$U(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-izx}dx,$$

$$(iz^2)U(z,t)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$U(z,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-izt}dx=G(z).$$

有于

$$\frac{\partial U}{\partial t}+a^2z^2U=0,$$

$$U(z,t)=U_0e^{-z^2a^2t},$$

$$U_0=U(z,0)=G(z),$$

$$U(z,t)=G(z)e^{-z^2a^2t}.$$

回忆习题 8.3.3,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,e^{-i\zeta x}dx=e^{-\zeta^2/2},$$

命 $\frac{\zeta^2}{2}=z^2a^2t$，则

$$e^{-z^2a^2t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{-iz\sqrt{2t}\,ax}\,dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/4a^2t}\,e^{-izu}du$$

$$=F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-u^2/4a^2t}\right].$$

因此，应用卷积定理

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,e^{-(x-\tau)^2/4a^2t}d\tau.$$

可以直接验证这是问题的一个解。

例 8.6.3. 其次，我们考虑关于一条半无限热传导棒的相应问题。设在 $x=0$ 处棒的温度保持零度并且初始温度分布为$f(x)$ 其中 $f(0)=0$. 于是试求 $x>0$ 与 $t>0$ 时的温度。问题可简述如下：

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t},\qquad 0<x<\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<\infty,$$

$$u(0,t)=0,\qquad t\geqslant 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0.$$

在此情形中，我们不能关于变量 x 应用 Fourier 变换，因为应用单边Fourier变换，需要知道 $u(0,t)$ 与 $u_x(0,t)$。另一方面，如果关于 t 用变式，我们能够确定变换后的方程因为仅包含关于 t 的一阶偏导数。然而，在这种特殊情形下，能直接从后面问题的解得到原问题的一个解。注意如果 $f(x)$ 是奇函数，

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,e^{-(x-\tau)^2/4a^2t}d\tau$$

也是奇函数；即，如果 $\sigma=-\tau$,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-\sigma)\,e^{-(x+\sigma)^2/4a^2t}\,d\sigma$$

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,e^{-(-x-\sigma)^2/4a^2t}\,d\sigma$$

$$=-u(-x,t).$$

又

$$u(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,e^{-\sigma^2/4a^2t}\,d\tau$$

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,e^{-\sigma^2/4a^2t}\,d\sigma$$

$$=-u(0,t).$$

故 $u(0,t)=0$，并且在现在这个例中如果仍保留 $f(x)$ 是一个奇函数，则对于 $x>0$ 得到我们的解。

例 8.6.4. 试求在一条半无限热传导棒中的温度，如果在 $x=0$ 处的温度保持为 $g(t)$ 而初始温度为 $u(x,0)=f(x)$. 问题简述如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\quad x>0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),$$

$$u(0,t)=g(t),$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0.$$

根据微分方程的线性性质可将解分解如下：

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

这里 u_1 与 u_2 都满足微分方程并且 $u_1(x,0)=f(x)$，$u_1(0,t)=0$，$u_2(x,0)=0$，$u_2(0,t)=g(t)$，$\lim\limits_{x\to\infty} u_1=\lim\limits_{x\to\infty} u_2=0$，于是

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-(x-\tau)^2/4a^2t}d\tau,$$

这里 $f(-x)=-f(x)$，$x>0$. 最后，我们必须解出 $u_2(x,t)$. 在此情形下，用 Fourier 正弦变换是方便的，所以再试求一个关于 x 是奇函数的解；即是，$u_2(-x,t)=-u_2(x,t)$. 于是

$$F[u_2(x,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_2(x,t)e^{-izx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}u_2(x,t)e^{-izx}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}u_2(x,t)e^{izx}dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i\int_0^{\infty}u_2(x,t)\sin zx\,dx,$$

$$F[u_{2xx}]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i\int_0^{\infty}u_{2xx}\sin zx\,dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i[u_{2x}\sin zx]_0^{\infty}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iz\int_0^{\infty}u_{2x}\cos zx\,dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iz[u_2\cos zx]_0^{\infty}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iz^2\int_0^{\infty}u_2\sin zx\,dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,izg(t)-z^2F[u_2].$$

如果 $U_2(z,t)=F[u_2]$，则

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}+a^2z^2U_2=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iza^2g(t)$$

满足 $U_2(z,o)=0$. 解此方程，有

$$U_2(z,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iza^2\int_0^t g(\tau)e^{-a^2z^2(t-\tau)}d\tau.$$

从例 8.6.2 知道

$$e^{-a^2z^2(t-\tau)}=F\left[\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}\right]$$

故

$$ize^{-a^2z^2(t-\tau)}=F\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}\right]$$

$$=F\left[\frac{-x}{[2a^2(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}\right]$$

故

$$u_2(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{g(\tau)e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

并且

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-(x-\tau)^2/4a^2t}d\tau$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{g(\tau)e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau.$$

能够直接验证这是问题的一个解。

我们再用一个波动方程的例子结束这一节，这次关于 x 是一个有限区间。

例 8.6.5. 试求一根长为 π 的弹性弦的位移，设弦固定在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 处，受一正比于 $\sin x$ 而对于 t 不变的力作用，假设初始速度与初始位移为零。问题可以简述如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-b\sin x,\ 0<x<\pi,\ t>0,$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$

这里，关于 t 取单边 Fourier 变换。于是如果 $U(x,z)=F[u]$，有

$$U_{xx}+\frac{z^2}{a^2}U=-\frac{b\sin x}{\sqrt{2\pi}iz}.$$

此方程的解为

$$U(x,z)=A\ \sin\frac{zx}{a}+B\cos\frac{zx}{a}-\frac{a^2 b\sin x}{\sqrt{2\pi}\,iz(z^2-a^2)}.$$

应用边界条件，有 $A=B=0$，与

$$U(x,z)=-\frac{a^2 b\sin x}{\sqrt{2\pi}\,iz(z^2-a^2)}.$$

反演积分给出：

$$u(x,t)=\frac{-a^2 b\sin x}{2\pi i}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{e^{izt}}{z(z^2-a^2)}dz,$$

其中 $r<-a$. 这个可由围道积分算出。如果 $t>0$ 我们在上半平面内用一半无封闭围道并且计算在原点及在 $z=\pm a$ 点处的留数。如果 $t<0$，在此情形下，因为封闭围道在下半平面，那里沒有极点，围道积分是零。最后结果是

$$u(x,t)=b\sin x(1-\cos at),\quad t>0,$$
$$=0,\qquad t<0.$$

这些例子说明了在解偏微分方程某些问题中 Fourier 变换的用途。这并沒有详论这个方法能应用的所有可能类型。一般的程序是对微分方程具有的变量中一个应用变换。这就常常把问题化为其他变量的常微分方程，或者成为余下变量的偏微分方程。把变换的变量作为一个参数，应用边界条件或初始条件于变换，这个新问题解决了。这种方法下解的变换得到了，并由反演积分求出解。一般，用这种方法得到的解可对原问题叙述的条件直接检验而不必在每一步都验证变换是否合乎条件。如果原问题的叙述是正确的，常常有唯一性定理保证用变换的方法所得的解是问题的唯一解。

习 题 8.6

1． 解一根固定在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处的弹性弦的位移，如果初始位移与初始速度为零，并有一外力 $bx(\pi-x)$ 沿弦作用

于弦上。

2. 一半无限长的弦，假设它具有零的初始位移与初始速度，并且在 $x=0$ 处的位移由 $u(0,t)=g(t)$，$t\geqslant 0$ 给出。试求这半无限弦的位移。

3. 试求一具有初始位移 $u(x,0)=f(x)$，$x\geqslant 0$，及初始速度为零的半无限弦的位移。并设弦固定在 $x=0$ 处。提示：由例8.6.1. 把 $f(x)$ 延拓为一奇函数，证明由此得一解。又如何解下述问题：$a^2u_{xx}=u_{tt}$，$x>0$，$t>0$，$u(x,0)=f(x)$，$u_t(x,0)=0$，$u(0,t)=g(t)$？

4. 试求在一半无限热传导板 $(x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ 的稳定情况的温度分布，其中假设 $u(x,0)=u(x,1)=0$ 与 $u(0,y)=f(y)$。

8.7 积分方程的解法

在应用中经常迂到积分方程，其中未知函数出现在一个卷积积分內。假设

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-z)u(z)dz$$

是关于未知函数 u 求解的积分方程，其中 f 与 K 是已给函数，它们每一个都有一个 Fourier 变换与之对应。设

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt$$

及
$$K(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k(t)e^{-izt}dt.$$

则

$$F(z)=K(z)U(z),$$

其中 $U(z)$ 是未知函数的变换。故

$$U(z)=F(z)/K(z),$$

$$u(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}[F(z)/K(z)]e^{izt}dz$$

例 8.7.1. 解积分方程

$$\sqrt{2\pi}\,e^{-t^2/2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t-\tau|}u(\tau)d\tau.$$

变换了的方程是

$$e^{-z^2/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{U(z)}{1+z^2}.$$

故

$$U(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+z^2)e^{-z^2/2}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}[e^{-z^2/2}-(iz)^2\ e^{-z^2/2}].$$

求它的逆，则

$$u(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[e^{-t^2/2}-\frac{d^2}{dt^2}e^{-t^2/2}\right]$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[e^{-t^2/2}-\frac{t^2}{2}e^{-t^2/2}\right].$$

这个已讨论过的积分方程通常叫做 Wiener—Hopf 方程。不幸地，在许多应用中，方程的左边不是完全已知的。一个典型的情形如下：

$$f(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)u(\tau)d\tau,\quad t>0,$$

$$f(t)=g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)u(\tau)d\tau,\quad t<0,$$

这里 $f(t)$ 是已知的，但 $g(t)$ 是未知的。在此情形下，一个更精细的方法即所谓 Wiener—Hopf 方法，是解积分方程所需要的。我们将概述这个方法并且指明它怎样应用于解一个特殊问

题。

假设

$$H_{-}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}h(t)e^{-izt}dt$$

在一个下半平面 $I_m(z)<b$ 中是解析的并且

$$G_{+}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}g(t)e^{-izt}dt$$

在一个上半平面 $a<I_m(z)$ 中是解析的。于是

$$H_{-}(z)+G_{+}(z)=K(z)U(z).$$

其中$K(z)$与$U(z)$分别是$h(t)$与$u(t)$变换，现在，假设$K(z)$可以写作如下形式

$$K(z)=\frac{K_{-}(z)}{K_{+}(z)},$$

其中$K_{-}(z)$对于 $I_m(z)<b$ 是解析的，而$K_{+}(z)$ 对于 $a<I_m(z)$ 是解析的，于是

$$K_{+}(z)H_{-}(z)+K_{+}(z)G_{+}(z)=K_{-}(z)\Omega(z).$$

再假设 $K_{+}(z)H_{-}(z)$ 可以写成

$$K_{+}(z)H_{-}(z)=P_{+}(z)+Q_{-}(z),$$

这里 $P_{+}(z)$对于 $a<I_m(z)$ 是解析的而 $Q_{-}(z)$对于$I_m(z)<b$是解析的，于是

$$E(z)=K_{+}(z)G_{+}(z)+P_{+}(z)=K_{-}(z)U(z)-Q_{-}(z).$$

我们又假定$U(z)$对于 $I_m(z)<b$是解析的。现在我们已定义一个函数$E(z)$ 它在带形域 $a<I_m(z)<b$ 内是解析的，而且，最后方程给出$E(z)$到整个平面上的解析延拓。因此，$E(z)$是一个整函数。如果能够证明$E(z)$是有界的，则由 Liouville's 定理$E(z)$是一个常数。如果在平面的任何部分都有当 $|z|\to\infty$时 $|E(z)|\to 0$，则$E(z)=0$。因此，

$$K_{-}(z)U(z)-Q_{-}(z)=0$$

$$U(z)=\frac{Q_-(z)}{K_-(z)}.$$

用这种方确定 $u(t)$ 的 Fourier 变换并不需要 $G_+(z)$（即 $g(t)$ 的 Fourier 变换）的特殊知识，但是，这方法需要把 $K(z)$ 与 $K_+(z)H_-(z)$ 分解，这常常不是容易的事。关于 Wiener—Hopf 方法的更一般的讨论参看 Benjamin Noble, The Wiener—Hopf Tecknique。纽约：Pergamon Press, Inc, 1958.

现在我们应用 Wiener—Hopf 方法解决声绕射理论中一个特殊问题。考虑由占有半个 xz 平面 ($x<0$, $-\infty<z<\infty$) 的一个半无限有声金属平板产生的声平面波的绕射。假设平面波以垂直于金属板边($x=0$)的方向冲击金属板的边，因而问题的解不依赖于 z 坐标，因此是一个二維问题。平面波的音速势具有形式

$$u_p(x,y,t)=e^{i[k(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-\omega t]}.$$

容易证明 u_p 满足波动方程

$$\nabla^2 u_p=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}.$$

现在，整个声場，即平面波加上散射場，必须满足波动方程

$$\nabla^2 u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

设 $u(x,y,t)=u_p(x,y,t)+u_s(x,y,t)$，其中 u_s 表示散射場并且 $u_s=\phi(x,y)e^{-i\omega t}$. 于是

$$\nabla^2\phi_s+k^2\phi_s=0,$$

其中 $k^2=\omega^2/a^2$. 故可写为

$$u(x,y,t)=\phi(x,y)e^{-i\omega t}=(\phi_p+\phi_s)e^{-i\omega t},$$

其中 $\phi_p=e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$.

因为金属平板是一个有声音的刚体障碍，故没有垂直于它

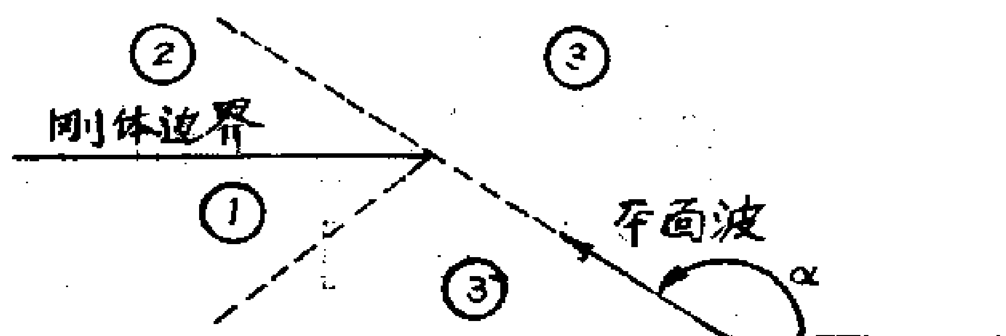


图 8.7.1

的速度分量，故对于$y=0$ 与 $x<0$中必须满足边界条件$\frac{d\phi}{dn}=0$。因为这个理由在金属平板上 ϕ_s 必须满足

$$\frac{d\phi_s}{dn}=-\frac{d\phi_p}{dn}.$$

问题于是变为确定 ϕ_s 满足：

$$\nabla^2\phi_s+k^2\phi_s=0.$$

且在金属平板上具有已给的$\frac{d\phi_s}{dn}$。

我们进一步将 ϕ_s 分解如下：由几何光学予知在图8.7.1的区域 1 中必有一个反射波

$$u_r(x,y,t)=e^{i[k(x\cos\alpha-y\sin\alpha)-\omega t]}$$

与在区域 2 内一个“影”。由几何光学予知解如下：

区域 1 ： $u=u_p+u_r$

区域 2 ： $u=0$

区域 3 ： $u=u_p$

从物理学的理由看，这个解是不能令人满意的，因为实践表明绕射影响没有包含在内；从数学角度看它也是不能使人满意的，因为它从平板离开的地方不是处处连续的。我们认为绕射

影响含在不是几何光学所予知的解的那部分之内，故有

区域 1： $u=u_p+u_r+u_d$

区域 2： $u=u_d$

区域 3： $u=u_p+u_d$

并且由于 u_d 系由外向柱面行波组成，它必须满足一辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left[\frac{\partial u_d}{\partial r}-iku_d\right]=0,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

为了推导这个问题的 Wiener—Hopf 积分方程我们用如下的 Green 函数：

$$G(\xi,\eta,x,y)=\frac{i}{4}\Big[H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})$$

$$+H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\Big],$$

它除在点(ξ,η)外处处满足 $\nabla^2G+k^2G=0$，$G_y(\xi,\eta,x,0)=0$，当 $r\to\infty$ 时满足辐射条件，并且当 $(x,y)\to(\xi,\eta)$ 时其性态与 $-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ 相似。考虑图 8.7.2 中两条围道。在上半平面按通常方法在整个場 $\phi^{(1)}(x,y)$ 应用 Green 恒等式，用 Green 函数的性质*得

$$\phi^{(1)}(\xi,\eta)=\int_{c_1}\left(G\frac{d\phi^{(1)}}{dn}-\phi^{(1)}\frac{dG}{dn}\right)ds$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=0^+}dx.$$

---

* 必须証明沿小的与大的半元的积分当它们的半径分别趋于零与无限而趋于零，详情参看 J. W. Dettman, Mathematical Mathods in Physics and Engineering, 纽约：McGraw—Hill Book Compang, Inc. 1962.

在下半平面我们应用 Green 恒等式于整个場 $\phi^{(2)}$ 减去平面波与

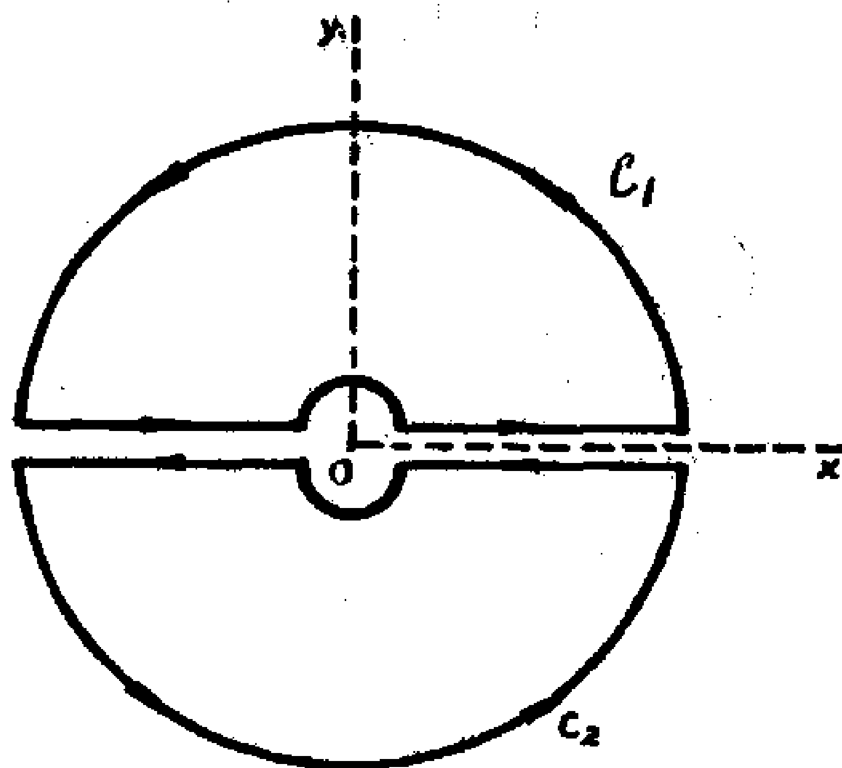


图 8.7.1

反射波。有

$$\phi^{(2)}(\xi,\eta)-e^{ik(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)}-e^{ik(\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\right)_{y=0^-}dx.$$

现在，对于 $\xi>0$，

$$\phi^{(2)}(\xi,\eta^-)-\phi^{(1)}(\xi,\eta^+)=0^*,$$

$$\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\right)_{y=0^+}=\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=0^-}$$

---

* 这里可能有错，应改为 $\phi^{(2)}(\xi,0^-)-\phi^{(1)}(\xi,0^+)=0$—译者

故

$$-2e^{ik\xi\cos\alpha}=2\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0}dx$$

$$=i\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k|x-\xi|)I(x)dx,$$

其中 $I(x)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0}$. 对于 $\xi<0$

$$\phi^{(2)}(\xi,0^-)-\phi^{(1)}(\xi,0^+)-2e^{ik\xi\cos\alpha}$$

$$=i\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k|x-\xi|)I(x)dx.$$

因此，我们有 Wiener—Hopf 积分方程

$$f(\xi)=i\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k|x-\xi|)I(x)dx$$

对 $I(x)$ 求解，其中

$$f(\xi)=-2e^{ik\xi\cos\alpha},\quad \xi>0,$$

$$f(\xi)=\phi(\xi,0^-)-\phi(\xi,0^+)-2e^{ik\xi\cos\alpha},\quad \xi<0,$$

且对于 $x<0$，$I(x)=0$.

这是前面一般情形描述的一个特例。我们并不知道

$$\phi(\xi,0)-\phi(\xi,0^+)$$

因而必须应用 Wiener—Hopf 方法为把现在的情况与一般的讨论一致起来，我们写

$$U(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}I(x)e^{-izx}dx$$

$$H_-(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{ikx\cos\alpha}e^{-izx}dx$$

$$=\frac{i}{\pi}\,\frac{1}{z-k\cos\alpha},$$

$$G_+(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-izx}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k|x-\xi|)I(\xi)d\xi dx,$$

$$K(z)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k|x|)e^{-izx}dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k^2-z^2}}.$$

在现在的情形下，$k=k_1+ik_2$，这里 $k_2>0$。$K(z)$在$\pm k$处有支点，但是倘若支割线不在带形域 $-k_2<I_m(z)<k_1$ 内的话，$K(z)$在带形域内是解析的。我们假定 $I(x)$的性态当 $x\to\infty$时与 $e^{\delta x}$类似，因而 $U(z)$ 对于 $I_m(z)<\delta$ 是解析的，可以证明 $H_0^{(1)}(k|x-\xi|)$的性态当$|x-\xi|\to\infty$时与$e^{ik|x-\xi|}/\sqrt{k|x-\xi|}$类似。故对于大的与负的 x，若$\int_0^{\infty}\xi^{-\frac{1}{2}}I(\xi)e^{ik\xi}d\xi$存在，则

$$i\int_0^{\infty}H^{(1)}(k|x-\xi|)I(\xi)d\xi$$

的性态与e^{ikx}类似。而如果 $-k_2<-\xi$，积分$\int_0^{\infty}\xi^{-\frac{1}{2}}I(\xi)e^{ikx}dx$在存，由此得结论：$G(z)$ 对于 $-k_2<I_m(z)$是解析的并且

$$H_-(z)+G^+(z)=K(z)U(z)$$

在带形域 $-k_2<I_m(z)<\text{mim}[-\delta,k_2\cos\alpha]$内成立。故

$$\frac{i}{\pi(z-k\cos\alpha)}+G_+(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U(z)}{\sqrt{k^2-z^2}}.$$

因为

$$K(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k^2-z^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k-z}\sqrt{k+z}}$$

则有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U(z)}{\sqrt{k-z}}=\frac{i\sqrt{k+z}}{\pi(z-k\cos\alpha)}+\sqrt{k+z}G_+(z).$$

其次，

$$\frac{i\sqrt{k+z}}{\pi(z-k\cos\alpha)}=\frac{i\sqrt{k+k\cos\alpha}}{\pi(z-k\cos\alpha)}+\frac{i\sqrt{k+z}+i\sqrt{k+k\cos\alpha}}{\pi(z-k\cos\alpha)}$$
$$=Q_-(z)+P_+(z),$$

这里在 $k\cos\alpha$ 处定义 $P_+(z)$ 的值为 $\frac{i}{2\pi\sqrt{k+k\cos\alpha}}$。容易证明 $P_+(z)$ 在 $k\cos\alpha$ 处是解析的。它有一个支点 $z=-k$，但是在上半平面 $-k_2<I_m(z)$ 内是解析的。结果

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U(z)}{\sqrt{k-z}}-\frac{i}{\pi}\frac{\sqrt{k+k\cos\alpha}}{z-k\cos\alpha}=P_+(z)=\sqrt{k+z}G_+(z),$$

这里左边对于 $I_m(z)<\min[-\delta,k_2\cos\alpha]$ 是解析的，而右边对于 $-k_2<I_m(z)$ 是解析的，故如一般情况所说这个方程由解析延拓定义一个整函数。很清楚，除去可能的 $\sqrt{k+z}G_+(z)$ 外所包含的函数当 $|z|\to\infty$ 时都趋于零。后一函数当 $z\to\infty$ 时可能增大，但不比 $\sqrt{z}$ 快。但是一个非常数的整函数至少像 z 一样快地增大。因此，这个函数处处为零并且由此可导出变式

$$U(z)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{k-z}\sqrt{k+k\cos\alpha}}{(z-k\cos\alpha)}.$$

由反演积分

$$I(x)=\frac{i}{2\pi}\sqrt{k+k\cos\alpha}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{e^{ixz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}dz,$$

这里 $-k_2<r<k_2\cos\alpha$。如果 $x<0$，我们可沿一直线 $x+ir$，$-R<x<R$ 积分并且在下半平面里用半径为 R 的一半园来封闭围道。容易证明在半园的积分值当 $R\to\infty$ 时趋于零。因此，对于 $x<0$，因为在围道内没有被积分函数的奇异点，$I(x)=0$。对于 $x>0$，考虑图 8.7.3。在此情形下，

$$\int_{C_+}\frac{e^{ixz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}dz=0,$$

因为围道内沒有奇点。又，当$R\to\infty$时半元弧部分的积分值趋于零，故

$$\int_{C_+}\frac{c^{izz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}\,dx+\int_{p+}\frac{e^{izz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}dz$$

$$=2\pi ie^{ikx\cos\alpha}\sqrt{k-k\cos\alpha},$$

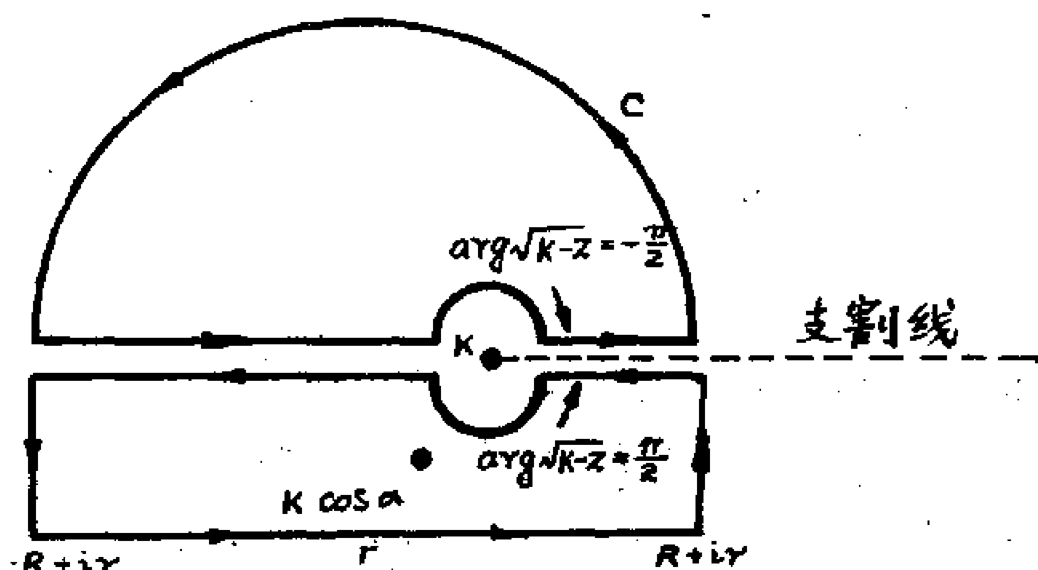


图 8.7.3.

因为在Γ内有一简单极点$k\cos\alpha$．命$R\to\infty$得

$$I(x)=-\sqrt{k^2-k^2\cos\alpha}\,e^{ikx\cos\alpha}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sqrt{k+k\cos\alpha}\int_L\frac{e^{izz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}dz,$$

这里L是一勾形围道，从无限远处沿着支割线的下侧进入，在小园上围绕k点一圈，又沿着割线上侧回到无限远处。这是因为在C上以及在直线Γ上位于在k的左边部分的积分值互相消去而其他部分当$R\to\infty$时趋于零。中心在k半径为ρ小元的积分值当$\rho\to 0$时而趋于零。在割线的下侧我们设$k-z=u^2e^{i\pi}$．于是$dz=2udu$及$\sqrt{k-z}=iu$．在割线的上侧我们设$k-z=u^2e^{-i\pi}$，于是$dz=2udu$及$\sqrt{k-z}=-iu$．所以

$$\int_L \frac{e^{ixz}\sqrt{k-z}}{z-k\cos\alpha}dz = -4i\int_0^\infty \frac{e^{ix(k+u^2)}u^2du}{k+u^2-k\cos\alpha}$$

$$= -4ie^{ixk}\int_0^\infty \frac{e^{ixu^2}\ u^2du}{k+u^2-k\cos\alpha},$$

$$I(x) = -\sqrt{k^2-k^2\cos\alpha}\,e^{ikx\cos\alpha} - \frac{2}{\pi}\sqrt{k+k\cos\alpha}\,e^{ikx}g(x).$$

这里

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{u^2e^{ixu^2}}{k+u^2-k\cos\alpha}du$$

$$= \int_0^\infty e^{ixu^2}\ du - (k-k\cos\alpha)\int_0^\infty \frac{e^{ixu^2}}{u^2+k-k\cos\alpha}du.$$

在第一积分内，设 $v=xu^2$，则 $du=dv/2\sqrt{x}\sqrt{v}$ 而

$$\int_0^\infty e^{ixu^2}\,du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}}dv.$$

而后面的积分是一个收歛的积分。剩下要确定

$$h(x) = \int_0^\infty \frac{e^{ixu^2}}{u^2+k-k\cos\alpha}du.$$

可以证明 $h'(x)+i\beta h(x)=iA/2\sqrt{x}$，这里 $\beta=k-k\cos\alpha$ 及 $A=\int_0^\infty (e^{iv}/\sqrt{v})dv$. 又，$h(0)=\int_0^\infty (u^2+\beta)^{-1}du=\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$. 对 $h(x)$求解，有

$$h(x) = e^{-i\beta x}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \frac{iA}{2}\int_0^x \frac{e^{i\beta t}}{\sqrt{t}}dt\right]$$

$$= e^{-i\beta x}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \frac{iA}{2}\left(\int_0^\infty \frac{e^{i\beta t}}{\sqrt{t}}dt - \int_x^\infty \frac{e^{i\beta t}}{\sqrt{t}}dt\right)\right]$$

$$= e^{-i\beta x}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \frac{iA}{2}\left(\int_0^\infty \frac{e^{i\beta t}}{\sqrt{t}}dt + \frac{e^{i\beta x}}{i\beta\sqrt{t}} - \frac{1}{2i\beta}\int_x^\infty \frac{e^{i\beta t}}{t^{\frac{3}{2}}}dt\right)\right]$$

最后一个积分的性态与 $e^{i\beta x}/x^{\frac{3}{2}}$ 类似，故对于 $x>0$

$$I(x)=-\sqrt{k^2-k^2\cos\alpha}\,e^{ikx\cos\alpha}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sqrt{k+k\cos\alpha}\,e^{ikx}\left[\frac{A}{2\sqrt{x}}-(k-k\cos\alpha)h(x)\right],$$

这就表明当 $x\to\infty$时，$I(x)$的性态与 $e^{ikx\cos\alpha}$类似，此因

$$\delta=k_2\cos\alpha<k_2,$$

这验证了在推导积分方程的假设。

为了确定声場，必须把 $I(x)$ 代入表达式

$$\phi^{(1)}(\xi,\eta)=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})\,I(x)\,dx$$

$$\phi^{(2)}(\xi,\eta)=-e^{ik(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)}-e^{ik(\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha)}$$

$$=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})\,I(x)\,dx.$$

由卷积定理

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})\,I(x)\,dx$$

的 Fourier 变式是

$$\frac{i}{\sqrt{k^2-z^2}}e^{i\sqrt{k^2-z^2}|\eta|}\,U(z)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{k+k\cos\alpha}\,e^{i\sqrt{k^2-z^2}|\eta|}}{\sqrt{k+z}(z-k\cos\alpha)}$$

并且

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}+H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})\,I(x)dx$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty+ir}^{\infty+ir}\frac{e^{iz\xi}\sqrt{k+k\cos\alpha}\,e^{i\sqrt{k^2-z^2}|\eta|}}{\sqrt{k+z}(z-k\cos\alpha)}dz$$

我们可以通过计算这个积分来讨论声场的性质，我们不详细讨论了。

习 题 8.7

1.证明对一切 $x\neq 0$ $H_0^{(1)}(k/x)$满足方程

$$xy''+y'+k^2xy=0.$$

试求$H_0^{(1)}(k/x)$的Fourier变换（积分常数包含在内）.

2. 导出关于由半平面产生的平面波的绕射的Wiener—Hopf积分方程，这里设在平面上的边界条件是$u(x,0)=0$.

第九章 Laplace 变换

9.1 从 Fourier 变换到 Laplace 变换

设$f(t)$是实变量t的复数值函数，设$f(t)$为逐段连续，并在任何有限区间内有逐段连续的导数。令 $|f(t)|\leqslant Ke^{-bt}$，$0\leqslant t<\infty$，及 $|f(t)|\leqslant Me^{-at}$，$-\infty<t\leqslant 0$，$a<b$．则复 Fourier 变换

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)^{-itz}dt$$

在 $a<\mathrm{Im}(z)<b$ 中为一解析函数，而且其逆变换存在，并且

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}G(z)e^{itz}dz,$$

其中$a<\gamma<b$. 如果我们把复z平面作一简单旋转，旋转 90°，即$\zeta=iz$，则

$$H(\zeta)=\sqrt{2\pi}\,G(-i\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-t\zeta}dt$$

在$-b<\mathrm{Re}(\zeta)<-a$ 中解析，其逆变换为

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}H(\zeta)e^{t\zeta}d\zeta.$$

$H(\zeta)$通常称为双边 Laplace 变换。对于它，有一个与 Fourier 变换的理论相平行的完整理论。但是更为有用的是单边 Laplace 变换，或简称为 Laplace 变换。

定义 9.1.1. 设$f(t)$是实变量t的复数值函数，且当t为负值时函数为零。设$f(t)$在任何有限区间上是逐段连续的，且

$|f(t)|\leqslant Ke^{bt}$，$0\leqslant t<\infty$，则 $f(t)$的 Laplace 变换是

$$H(z)=L[f]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-zt}dt.$$

定理 9.1.1. 设$f(t)$是实变量 t 的复数值函数，且当 t 为负值时函数为零。设$f(t)$是逐段连续的，且在任何有限区间上有逐段连续的导数。设$|f(t)|\leqslant Ke^{bt}$，$0\leqslant t<\infty$. 则 $f(t)$ 的 Laplace 变换在 $\mathrm{Re}(z)>b$ 中解析，且

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}H(z)e^{zt}dz,$$

这里积分是沿着直线$\gamma+iy$，$-\infty<y<\infty$进行的，其中$b<\gamma$.

证明 只要我们作了前面所说的旋转，这是从 Fourier 变换显然得到的结果。

例 9.1.1. 求 $f(t)=u(t)\sin\omega t$ 的 Laplace 变换，其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数，并验证其反演公式(即逆变换公式)。

事实上设 $\mathrm{Re}(z)>0$，则

$$\begin{aligned}L[u(t)\sin\omega t]&=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})e^{-zt}\,dt\\&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i\omega}-\frac{1}{z+i\omega}\right]\\&=\frac{\omega}{z^2+\omega^2},\end{aligned}$$

函数 $\omega/(z^2+\omega^2)$ 在除去$\pm i\omega$ 外的域中是解析的。因此它是 Laplace 变换到平面的其余部分的解析开拓。反演积分（即逆变换积分）可用围道积分计算：

$$\frac{\omega}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{zt}}{z^2+\omega^2}dz=\frac{\omega}{2\pi i}\int_C\frac{e^{zt}}{z^2+\omega^2}dz,$$

这里C是图 9.1.1 中所示的围道。在围道的内部$i\omega$与$-i\omega$处，被积函数有两个简单极点。因此，由留数定理：

$$\frac{\omega}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+\omega^2}dz=\omega\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i\omega}\right]=\sin\omega t .$$

我们还须证明在半园上的积分当R趋于无穷大时趋于零。设$z=\gamma+\mathrm{Re}^{i\theta}$，$\pi/2\leqslant\theta\leqslant3\pi/2$，则当$R\to\infty$时

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{\gamma t}e^{tR\cos\theta+it\sin\theta}\mathrm{Re}^{i\theta}}{(\gamma+\mathrm{Re}^{i\theta})^2+\omega^2}d\theta\right|$$

$$\leqslant\frac{\pi e^{\gamma t}R}{R^2-\gamma^2-\omega^2}\to O.$$

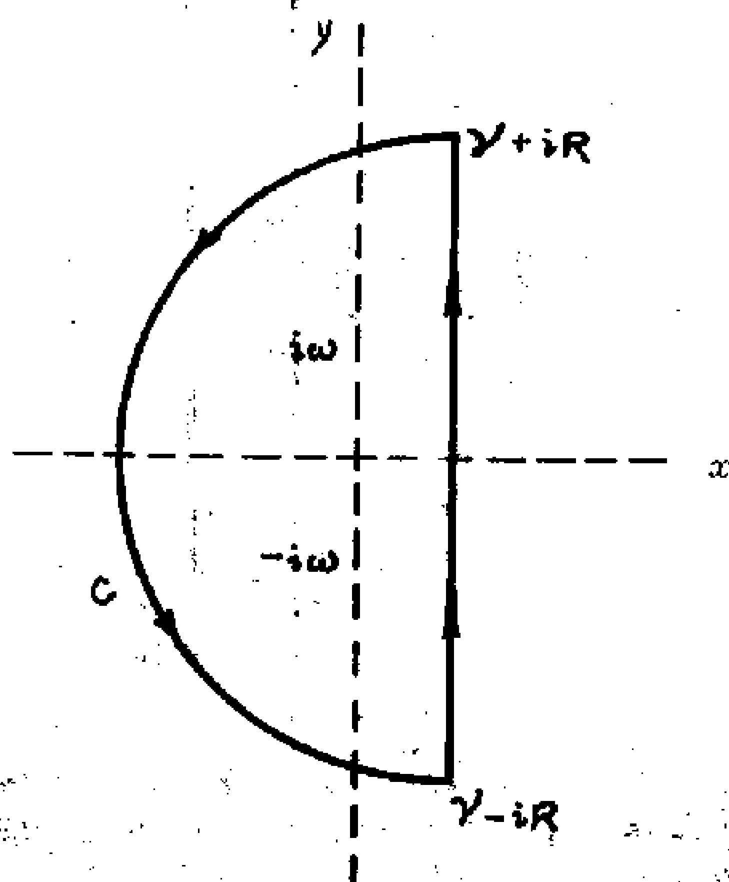


图 9.1.1

在某些特殊情况下，定理9.1.1的假设条件还可能放宽。

例 9.1.2. 求$u(t)t^C$的Laplace变换，其中$C>-1$。

因为若$-1<C<0$，则当t从右边趋于零时，所给函数趋于无穷大。虽然如此，Laplace变换仍存在，并且在域$\mathrm{Re}(z)>0$

中解析，这是因为

$$L[u(t)t^c]=\int_0^\infty t^c e^{-zt}dt$$

并且积分在 Re(z)>0 中是解析的。为计算这积分，令 $z=x$，并令 $s=xt$，则

$$\int_0^\infty t^c e^{-xt}dt=x^{-c-1}\int_0^\infty s^c e^{-s}ds=\frac{\Gamma(c+1)}{x^{c+1}}.$$

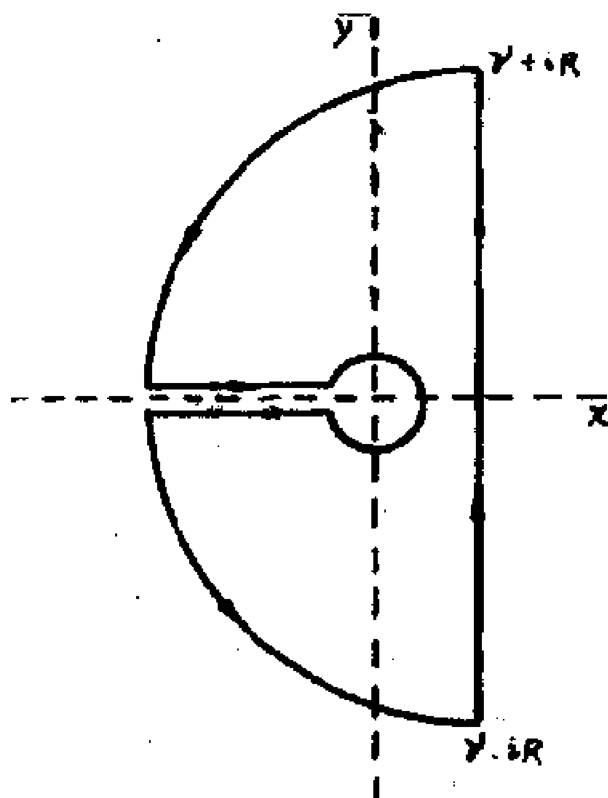


图 9.1.2

现在，如果选取 $\Gamma(c+1)/z^{c+1}$ 的一支，其支割线是沿着负实轴的，那么函数 $\Gamma(c+1)/z^{c+1}$ 在 Re(z)>0 中是解析的，所以

$$L[u(t)t^c]=\int_0^\infty t^c e^{-zt}dt=\frac{\Gamma(c+1)}{z^{c+1}},$$

因为方程的两端在同一半平面是解析的，并且沿着正实轴等同。为要验证反演积分，我们应该沿着一条不越过支割线的围道（见图 9.1.2）进行积分。因为在C内没有奇点，所以，

$$\frac{\Gamma(c+1)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{z^{c+1}}dz=0.$$

可以证明沿半径为 R 的圆弧上的积分当 R 趋于无穷大时趋于零。所以

$$\frac{\Gamma(c+1)}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^{c+1}}\,dz=\frac{\Gamma(c+1)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zt}}{z^{c+1}}dz,$$

这里Γ是与在§4.10中Hankel积分使用过的勾型围道相同。因为$t>0$，我们可作变量替换$\zeta=zt$，于是

$$\frac{\Gamma(c+1)}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^{c+1}}dz=t^c\frac{\Gamma(c+1)}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\zeta}\zeta^{-(c+1)}d\zeta=t^c,$$

这是因为$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{\zeta}\zeta^{-(c+1)}d\zeta$是关于$\dfrac{1}{\Gamma(c+1)}$的Hankel积分。

习　题 9.1

1．试求单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

的 Laplace 变换；并对$t>0$及$t<0$验证反演积分。当$t=0$时反演积分的值是什么？

2．试求函数$f(t)=u(t)\cos\omega t$的Laplace变换，其中$u(t)$是单位阶跃函数。并验证反演积分。

3．在定理 9.1.1 的假设下，$f(t)$的 Laplace 变换在$\mathrm{Re}(z)>b$中是解析的，因而可以在积分号下微分。证明

$$-\frac{d}{dz}L[f(t)]=L[tf(t)].$$

利用这个结果，试求$tu(t)\sin\omega t$的 Laplace 变换。

9.2 Laplace 变换的性质

在讨论 Laplace 变换的一些重要的应用之前，我们必须研究它的性质以及求逆变换的一些技巧。

定理 9.2.1. Laplace 变换是一个线性变换，即，若 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是两个具有 Laplace 变换的函数，并且 a 与 b 是任何常数，则

$$L[af+bg]=aL[f]+bL[g].$$

证明

$$\begin{aligned}L[af+bg]&=\int_0^\infty[af(t)+bg(t)]e^{-zt}dt\\&=a\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt+b\int_0^\infty g(t)e^{-zt}dt\\&=aL[f]+bL[g].\end{aligned}$$

定理 9.2.2. 若 $t>0$ 时 $f(t)$ 是连续的，且

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=f(0^+)$$

存在，$f'(t)$ 在任何有限区间中是逐段连续的，且

$$|f'(t)|\leqslant Ke^{bt},\ 0\leqslant t<\infty,$$

则

$$L[f']=zL[f]-f(0^+)$$

在 $\mathrm{Re}(z)>a$ 中成立，其中 $a=\max[0,b]$.

证明 对于 $t>0$

$$f(t)=f(0^+)+\int_0^t f'(\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned}|f(t)|&\leqslant|f(0^+)|+\int_0^t|f'(\tau)|d\tau\\&\leqslant|f(0^+)|+\int_0^t ke^{b\tau}d\tau\\&\leqslant|f(0^+)|+k\frac{e^{bt}-1}{b}\leqslant Me^{at},\end{aligned}$$

这里 $a=\max[0,b]$. 所以 $L[f]$及$L[f']$存在并且在 $\mathrm{Re}(z)>a$ 中解析。设 $z=x>a$，则

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-xt}dt = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon)e^{-x\varepsilon} + \lim_{T\to\infty} f(T)e^{-xT}$$

$$+x\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$$

$$= -f(0^+) + x\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt.$$

因此，$L[f']=zL[f]-f(0^+)$，这是因为等式两端在 $\mathrm{Re}(z)>a$ 中是解析的并且在实轴上相等。

推论 9.2.1. 设 $f(t)$满足定理 9.2.2 中的假设，则存在常数M及一个半平面 $\mathrm{Re}(z)\geqslant\rho$，使得在这半平面中

$$|L[f]|\leqslant M/|z|.$$

证明 参照定理 9.2.2，在 $\mathrm{Re}(z)>a$ 中 $L[f']$ 及 $L[f]$存在。令 $\rho>a$. 则

$$|L[f']|\leqslant\int_0^\infty Ke^{bt}e^{-xt}\,dt=\frac{K}{x-b}\leqslant\frac{K}{\rho-b}.$$

令 $M=2\max\left[\dfrac{K}{\rho-b},\ |f(0^+)|\right]$，则

$$|L[f]|\leqslant\frac{|f(0^+)|+|L[f']|}{|z|}$$

$$\leqslant\frac{|f(0^+)|+K/(\rho-b)}{|z|}\leqslant\frac{M}{|z|}.$$

定理 9.2.3. 设 $f(t)$及其前 $n-1$阶导数在$t>0$ 时连续。又设 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=f(0^+)$，$\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)=f'(0^+)$，…，

$$\lim_{t\to 0^+} f^{(n-1)}(t)=f^{(n-1)}(0^+)$$

均存在。又设$f^{(n)}(t)$在任何有限区间逐段连续，且在$0\leqslant t<\infty$中$|f^{(n)}(t)|\leqslant Ke^{bt}$. 则在半平面$\mathrm{Re}(z)>a$, 其中$a=\max[0,b]$, 下述公式成立：

$$L[f^{(n)}]=z^nL[f]-z^{n-1}f(0^+)-z^{n-2}f(0^+)\\-\cdots-zf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+).$$

证明 对于$t>0$

$$f^{(n-1)}(t)=f^{(n-1)}(0^+)+\int_0^t f^{(n)}(\tau)d\tau,$$

$$|f^{(n-1)}(t)|\leqslant|f^{(n-1)}(0^+)|+\int_0^t Ke^{b\tau}d\tau$$

$$\leqslant|f^{(n-1)}(0^+)|+K\frac{e^{bt}-1}{b}\leqslant Me^{at},$$

其中$a=\max[0,b]$. 由定理9.2.2，在半平面$\mathrm{Re}(z)>a$，有

$$L[f^{(n)}]=zL[f^{(n-1)}]-f^{(n-1)}(0^+),$$

类似的，有

$$L[f^{(n-1)}]=zL[f^{(n-2)}]-f^{(n-2)}(0^+)$$

$$L[f^{(n)}]=z\{zL[f^{(n-2)}]-f^{(n-2)}(0^+)\}-f^{(n-1)}(0^+)\\=z^2L[f^{(n-2)}]-zf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+).$$

$$L[f^{(n)}]=z^nL[f]-z^{n-1}f(0^+)-z^{n-2}f'(0^+)\\-\cdots-zf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+).$$

定理 9.2.4 设$f(t)$在任何有限区间中逐段连续，且

$$|f(t)|\leqslant Ke^{bt},\quad 0\leqslant t<\infty.$$

则

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$$

在$t>0$中是连续的，$F(0)=0$，且在半平面$\mathrm{Re}(z)>a$中

$$L[F]=\frac{1}{z}L[f]$$

成立，这里$a=\max[0,b]$.

证明 对于 $t>0$

$$|F(t)| \leqslant \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leqslant \int_0^t k\,e^{b\tau}d\tau = k\,\frac{e^{bt}-1}{b} \leqslant Me^{at},$$

这里 $a=\max[0,b]$. 由定理 9.2.2,

$$L[f]=L[F']=zL[F]-F(0)=zL[F].$$

于是对于 $\mathrm{Re}(z)>a$, $L[F]=\frac{1}{z}L[f]$.

定理 9.2.5. 设$f(t)$在任何有限区间中逐段連续,且对于 $0\leqslant t<\infty$, $|f(t)|\leqslant k\,e^{bt}$. 如果$H(z)$是$f(t)$的Laplace 变换,则对于 $\mathrm{Re}(z)>b+c$,

$$L[e^{ct}f(t)]=H(z-c)$$

成立。

证明 $f(t)$的 Laplace 变換存在,并且在 $\mathrm{Re}(z)>b$ 中解析。又 $|e^{ct}f(t)|\leqslant Ke^{(b+c)t}$.因此,对于$\mathrm{Re}(z)>b+c$, $L[e^{ct}f(t)]$解析。令 $z=x>b$.
则

$$\int_0^\infty e^{ct}f(t)e^{-xt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(x-c)t}dt=H(x-c).$$

所以,对于 $\mathrm{Re}(z)>b+c$, $L[e^{ct}f(t)]=H(z-c)$, 这是因为方程两端在同一半平面内解析并且在实轴上相等。

定理 9.2.6. 设$f(t)$是一个在$\mathrm{Re}(z)>b$中有 Laplace 变换的函数。设$u(t)$是单位阶跃函数:

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

若 $a>0$, 则

$$L[u(t-a)f(t-a)]=e^{-az}L[f(t)].$$

证明

$$L[u(t-a)f(t-a)]=\int_a^{\infty}f(t-a)e^{-zt}dt=\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-z(\tau+a)}d\tau$$
$$=e^{-az}\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-z\tau}d\tau=e^{-az}L[f(t)].$$

定理 9.2.7. 设 $f(t)$ 及 $g(t)$ 当 $t<0$ 时为零，并当 $t>0$ 时 $f(t)$，$g(t)$ 均连续。又在 $0\leqslant t<\infty$ 中设 $|f(t)|\leqslant Ke^{bt}$ 及 $|g(t)|\leqslant Ke^{bt}$，则它们的卷积

$$f*g=h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

当 $t<0$ 时为零，而当 $0\leqslant t<\infty$ 时连续，并且满足 $|h(t)|\leqslant M^{at}$，这里 M 是常数，且 $a>b$，而且

$$L[h]=L[f]L[g].$$

证明 当 $t<0$ 时 $h(t)=0$ 可以显然地由 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 一事得到。又

$$\lim_{t\to0^+}h(t)=\lim_{t\to0^+}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=0,$$

这是因为对于充分小的 τ，$f(\tau)$ 与 $g(t-\tau)$ 都是有界的。对于 $t>0$，积分是积分上限及参数 t 的连续函数。现在，若设 $a>b$，并令 $t\to\infty$，则

$$|e^{-at}h(t)|=e^{-at}\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right|$$
$$\leqslant e^{-at}\int_0^t K^2e^{b\tau}e^{b(t-\tau)}d\tau$$
$$=K^2e^{(b-a)t}\int_0^t d\tau=K^2te^{(b-a)t}\to0,$$

所以，存在正数 M 使得

$$|h(t)|\leqslant Me^{at}.$$

令 $\mathrm{Re}(z)>b$，则存在 $a>b$ 而使得 $\mathrm{Re}(z)>a>b$。因此，$L[h]$ 在 z 处解析。这就证明了对于 $\mathrm{Re}(z)>b$，$L[h]$ 是解析的。又

$L[f]$及 $L[g]$ 在 $\mathrm{Re}(z)>b$ 中是解析的。所以，为要证明在 $\mathrm{Re}(z)>b$ 中$L[h]=L[f]L[g]$，我们应证等式在实轴 $z=x>b$ 上成立。利用当 $\tau>t$ 时 $g(t-\tau)=0$ 这一事实，我们有

$$\int_0^\infty h(t)e^{-xt}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_0^t f(\tau)e^{-xt}g(t-\tau)d\tau dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^T e^{-xt}g(t-\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau\int_0^{T-\tau}g(u)e^{-xu}du$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau\int_0^\infty g(u)e^{-xu}du.$$

到此证明完毕。

在本节结束时，我们举一些例子说明怎样运用这些性质去寻求某些初等函数的 Laplace 变换。

例 9.2.1. 设$u(t)$为单位阶跃函数，则 $L[u(t)]=1/z$.

因为 $|u(t)|\leqslant 1$. 故有 $b=0$，并且当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时$L[u(t)]$解析。又函数 $1/z$ 在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 中解析，并且对于 $x>0$，

$$\int_0^\infty u(t)e^{-xt}dt=\int_0^\infty e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

故 $L[u(t)]=1/z$.

例 9.2.2. 设$f(t)=u(t)t^n$, $n=1,2,3,\cdots$证明：

$$L[f(t)]=n!z^{-(n+1)}.$$

我们有 $f'(t)=nu(t)t^{n-1}$, $f''(t)=n(n-1)u(t)t^{n-2}$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t)=n!u(t)t$, $f^{(n)}(t)=n!u(t)$. 所以，$f,f',f'',\cdots f^{(n-1)}$是连续函数，且 $f^{(n)}$是逐段连续的。由定理 9.2.3，

$$z^nL[f]=L[f^{(n)}]=L[n!u(t)]=n!z^{-1},$$

$$L[f]=n!z^{-(n+1)}.$$

例 9.2.3. 设$f(t)=u(t)\cos\omega t$，证明

$$L[f(t)]=z/(z^2+\omega^2).$$

事实上对$t>0$，我们有

$$(1/\omega)\sin\omega t=\int_0^t u(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

所以由定理9.2.4及例9.1.1,

$$L\left[\frac{u(t)\sin\omega t}{\omega}\right]=\frac{1}{z}L[f(t)],$$

$$\frac{z}{z^2+\omega^2}=L[f(t)].$$

例 9.2.4. 设$f(t)=u(t)e^{at}$。证明$L[f(t)]=(z-a)^{-1}$.

事实上，我们有 $|f(t)|\leqslant e^{at}$. 所以在$\mathrm{Re}(z)>a$中$L[f(t)]$解析。$(z-a)^{-1}$也是如此。又

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-xt}dt=\frac{1}{x-a}.$$

所以，在半平面$\mathrm{Re}(z)>a$中等式成立。

例 9.2.5. 求$u(t)e^{at}\sin\omega t$的 Laplace 变换。

由定理9.2.5及例9.1.1,

$$L[u(t)e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}.$$

例 9.2.6. 求$u(t-a)\cos\omega(t-a)$的 Laplace 变换，其中$a>0$.

由定理9.2.6及例9.2.3,

$$L[u(t-a)\cos\omega(t-a)]=\frac{ze^{-az}}{z^2+\omega^2}.$$

例 9.2.7. 求$u(t)te^{at}$的 Laplace 变换.

由于$L[u(t)e^{at}]$在$\mathrm{Re}(z)>a$中解析（见例9.2.4). 故变换可在积分号下微分。因此

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{1}{(z-a)^2}=-\frac{d}{dz}\int_0^\infty e^{at}e^{-zt}dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{at}\frac{d}{dz}e^{-zt}dt$$

$$=\int_0^\infty te^{at}e^{-zt}dt=L[u(t)te^{at}].$$

例 9.2.8. 求 $u(t)J_0(kt)$ 的 Laplace 变换，这里 $J_0(kt)$ 是零阶 Bessel 函数。

现在由于 $J_0(kt)$ 是问题：

$$\begin{cases} tJ_0''(kt)+J_0'(kt)+k^2tJ_0(kt)=0 \\ J_0(0)=1,\ \ J_0'(0)=0 \end{cases}$$

的唯一解。对微分方程各项取变换，得

$$-\frac{d}{dz}[z^2G(z)-z]+zG(z)-1-k^2\frac{d}{dz}G(z)=0,$$

这里 $G(z)=L[u(t)J_0(kt)]$. 因此 G 满足微分方程：

$$G'+\frac{z}{k^2+z^2}G=0,$$

它给出如下的解：

$$G(z)=\frac{C}{\sqrt{k^2+z^2}},$$

其中 C 是积分常数，而平方根函数是如下的一枝：它在右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 中解析，且在实轴上取正值。为要计算 C，回忆 $J_0'(kt)=-kJ_1(kt)$，以及 $J_1(kt)$ 对一切的 t 为有界，于是，由推论 9.2.1

$$\lim_{x\to\infty}L[-ku(t)J_1(kt)]=\lim_{x\to\infty}[xG(x)-J_0(0)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{Cx}{\sqrt{k^2+x^2}}-1\right]=0.$$

所以，$C=1$，并且

$$L[u(t)J_0(kt)]=\frac{1}{\sqrt{k^2+z^2}}.$$

顺便，我们证明了：

$$L[u(t)J_1(kt)]=\frac{1}{k}\left(1-\frac{z}{\sqrt{k^2+z^2}}\right).$$

习 题 9.2

1. 利用 Laplace 变换的一般性质，寻求下列函数的 Laplace 变换：

(a) $u(t)t^n e^{at}$, $n=1,2,3,\cdots$, 答：$n!/(z-a)^{n+1}$;

(b) $u(t)\cosh\omega t$, 答：$z/(z^2-\omega^2)$;

(c) $tu(t-a)e^{bt}$, $a>0$, 答：$[e^{ab}e^{-az}/(z-b)^2]$
$+[(ae^{ab}e^{-az}/(z-b)]$;

(d) $\int_0^t e^{-\tau}\cos\omega(t-\tau)d\tau$, 答：$z/(z-1)(z^2+\omega^2)$.

2. 设 $G(z)=L[f(t)]$, $\mathrm{Re}(z)>b$. 则

$$H(x)=\int_0^\infty G(t)dt,\quad x>b,$$

是 x 的函数，且在 x 轴上有一切导数。这里积分是沿着实轴的。设 $H(z)$ 是 $H(x)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>b$ 中的解析开拓，如果

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)/t$$

存在，证明：$H(z)=L[f(t)/t]$.

3. 利用上题的结果求下列函数的 Laplace 变换：

(a) $u(t)\sin\omega t/t$, 答：$\tan^{-1}(\omega/z)$;

(b) $u(t)\sinh\omega t/t$, 答：$\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$;

(c) $u(t)J_1(kt)/t$, 答：$\frac{1}{k}(\sqrt{k^2+z^2}-z)$.

4. 设 $f(t)$满足定理9.1.1中的假设，并对于某个$\tau>0$，有 $f(t+\tau)=f(t)$，其中$t>0$，证明

$$L[f]=\frac{1}{1-e^{-\tau z}}\int_0^\tau e^{-zt}f(t)dt.$$

试求 $f(t)=u(t)[t]$的 Laplace 变换，这里$[t]$是不超过 t 的最大整数。

9.3 Laplace 变换的反演

在某种意义下，反演问题是由定理9.1.1中指出的反演积分解决的。然而，实际上，Laplace 变换的反演，常常是利用认识某些一般类型的已知函数的变换的能力来进行。作为这种技术的辅助手段，我们有下面的唯一性定理。

定理 9.3.1. 设 $f(t)$和 $g(t)$均满足定理9.1.1的假设，并且二者都有相同的 Laplace 变换$G(z)$. 则 $f(t)$与 $g(t)$在任何有限区间上只能在有限个点上有不同的值。如果$f(t)$与$g(t)$都是连续的，则$f(t)\equiv g(t)$.

证明 因为f和g两者具有相同的变换，故

$$\frac{f(t^+)-f(t^-)}{2}=\frac{g(t^+)-g(t^-)}{2}.$$

但在任何有限区间中，f与g只能有有限个不连续点。在f与g都连续的地方，$f(t)=g(t)$.

在许多应用中变换是一个有理函数，即

$$L[f]=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

若f是满足定理9.2.2假设条件的函数，那么由推论9.2.1，$Q(z)$的次数必须大于$P(z)$的次数。我们还可假设P与Q没有共同的零点，这是因为变换必须在一个右半平面中解析。我们将要证明一系列定理，说明怎样求出这种类型的逆变换，这些

定理是建立在第4.6节的部分分式展开式的基础上的。

定理 9.3.2. 设$f(t)$满足定理9.2.2的假设，

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+} f(t)$$

且$L[f]=P(z)/Q(z)$，其中$Q(z)$有简单零点r_1，r_2，$\cdots r_n$. 则

$$f(t)=u(t)\sum_{k=1}^{n} A_k e^{r_k t},$$

其中$u(t)$是单位阶跃函数，且

$$A_k=\lim_{z\to r_k}(z-r_k)P(z)/Q(z).$$

证明 由定理4.6.6，我们可把$L[f]$写作：

$$L[f]=P(z)/Q(z)=\sum_{k=1}^{n} A_k/(z-r_k),$$

由于$A_k/(z-r_k)=L[u(t)A_k e^{r_k t}]$，于是由定理9.3.1便得所求结果。

定理 9.3.3. 设$f(t)$满足定理9.2.2的假设，

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+} f(t),$$

且$L[f]=P(z)/Q(z)$，其中$Q(z)$有根r_1，r_2，$\cdots$，r_m，并且它们的次数分别是$k_1, k_2, \cdots, k_m$，且使得$\sum_{j=1}^{m} k_j=n$.

则

$$f(t)=u(t)\sum_{j=1}^{m} f_j(t)$$

$$f_j(t)=\sum_{i=1}^{k_j} A_{ij} t^{i-1} e^{r_j t},$$

$$A_{ij}=\lim_{z\to r_j}\frac{1}{(k_j-i)!}\frac{d^{k_j-i}}{dz^{k_j-i}}[(z-r_j)^{k_j}P(z)/Q(z)].$$

证 由定理4.6.6，可得

$$L[f]=P(z)/Q(z)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j}A_{ij}/(z-r_j)^i,$$

由于 $A_{ij}/(z-r_j)^i=L[u(t)A_{ij}t^{i-1}e^{r_jt}]$, 由定理 9.3.1 便得所求结果.

例 9.3.1. 试求一函数，它满足定理 9.3.3 的假设，且其 Laplace 变换为:

$$L[f]=\frac{z+1}{(z-1)^2(z^2+2z+2)}.$$

由于这里 $P(z)=z+1$, $Q(z)=(z-1)^2(z^2+2z+2)$
$=(z-1)^2(z+1-i)(z+1+i)$. 故

$$r_1=1,\ r_2=-1+i,\ r_3=-1-i,$$

它们的次数分别为 $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=1$, 所以

$$A_{11}=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z^2+2z+2}\right)=-\frac{3}{25},$$

$$A_{21}=\lim_{z\to1}\frac{z+1}{z^2+2z+2}=\frac{2}{5},$$

$$A_{12}=\lim_{z\to-1+i}\frac{z+1}{(z-1)^2(z+1+i)}=\frac{3+4i}{50},$$

$$A_{13}=\lim_{z\to-1-i}\frac{z+1}{(z-1)^2(z+1-i)}=\frac{3-4i}{50},$$

从而

$$f(t)=u(t)\left[-\frac{3}{25}e^t+\frac{2}{5}te^t+\frac{3+4i}{50}e^{-t+it}+\frac{3-4i}{50}e^{-t-it}\right]$$

$$=u(t)\left[-\frac{3}{25}e^t+\frac{2}{5}te^t+\frac{3}{25}e^{-t}\cos t-\frac{4}{25}e^{-t}\sin t\right].$$

在这个例子中，我们得到 $e^{-t}\cos t$ 与 $e^{-t}\sin t$ 两项，是由

于下述的理由：

$$\frac{az+b}{z^2+2z+2}=\frac{az+b}{z^2+2z+1+1}=\frac{a(z+1)}{(z+1)^2+1}+\frac{b-a}{(z+1)^2+1}$$

$$=aL[u(t)e^{-t}\cos t]+(b-a)L[u(t)e^{-t}\sin t].$$

事实上，推论 4.6.2 告诉我们在有理函数$P(z)/Q(z)$的部分分式展开式中，若这里 P，Q 都有实数系数，那么如下的形式

$$\frac{Az+B}{(z-a)^2+b^2},$$

的一项对应着 $Q(z)$的一个简单复根$a+ib$，且

$$A=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{b}\lim_{z\to a+ib}\{[(z-a)^2+b^2]P(z)/Q(z)\}\right),$$

$$B=\operatorname{Re}\left(\lim_{z\to a+ib}\{[(z-a)^2+b^2]P(z)/Q(z)\}\right)-aA.$$

显然，A，B 是实的，因此

$$\frac{Az+B}{(z-a)^2+b^2}=\frac{A(z-a)+B+aA}{(z-a)^2+b^2}=L[u(t)Ae^{at}\cos bt]$$

$$+L\left[u(t)\frac{B+aA}{b}e^{at}\sin bt\right].$$

定理 9.3.4. 设$f(t)$满足定理 9.2.2 中的假设，

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+}f(t),$$

且 $L[f]=P(z)/Q(z)$，其中 P 与Q具有实系数，且Q 有简单复根 $a\pm ib$，则 $f(t)$包含的项，

$$u(t)Ae^{at}\cos bt+u(t)A'e^{at}\sin bt$$

对应于 $P(z)/Q(z)$ 的部分分式展开式中的项 $C/(z-a-ib)$及 $D/(z-a+ib)$，其中

$$A=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{b}\lim_{z\to a+ib}\{[(z-a)^2+b^2]P(z)/Q(z)\}\right),$$

$$A' = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{b}\lim_{z\to a+ib}\{[(z-a)^2+b^2]P(z)/Q(z)\}\right).$$

证明 容易观察到 $A' = (B + aA)/b$，由此，并由上面的讨论可得出定理的结果。

例 9.3.2. 试求一个函数，它满足定理 9.3.4 的假设，且其 Laplace 变换为

$$L[f] = \frac{z-1}{[(z-2)^2+1][(z+2)^2+4]}.$$

令

$$L_1 = \lim_{z\to 2+i}\frac{z-1}{(z+2)^2+4} = \frac{27+11i}{525},$$

$$L_2 = \lim_{z\to -2+2i}\frac{z-1}{(z-2)^2+1} = \frac{-71-22i}{425}.$$

令 $A' = (1/b_1)\mathrm{Im}(L_1)$，$A_1' = (1/b_1)\mathrm{Re}(L_1)$，

且

$$A_2 = (1/b_2)\mathrm{Im}(L_2),\quad A_2' = (1/b_2)\mathrm{Re}(L_2),$$

则

$$f(t) = u(t)\left[\frac{27}{525}e^{2t}\cos t + \frac{11}{525}e^{2t}\sin t - \frac{71}{850}e^{-2t}\cos 2t - \frac{11}{425}e^{-2t}\sin 2t\right].$$

这里还有一个与定理 9.3.4 对应的定理，它是关于 $Q(z)$ 有重复的二次因子的情形，但我们不准备在这里讲它。

利用上节所导出的性质，许多变换都可看作是已知函数的变换。

例 9.3.3. 试求函数，它的变换为 $\log(z-a)-\log(z-b)$，其中 a，b 是实数，并且选择分支使得它们在一个右 半 平面内为解析。

参看习题9.2.2，我们有

$$\frac{d}{dx}[\log(x-a)-\log(x-b)]=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}.$$

现在

$$\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-b}=L[u(t)(e^{bt}-e^{at})]=G(z).$$

从而

$$H(x)=\int_x^{\infty}G(t)\,dt=\log(x-a)-\log(x-b).$$

因此，利用习题9.2.2的结果，我们有：

$$\log(z-a)-\log(z-b)=L\left[u(t)\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right].$$

例 9.3.4. 试求一函数，它的Laplace变换为 $1/z\sqrt{z^2+k^2}$，其中 $k>0$，且选择平方根的分支，使得它在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 中为解析，且在实轴上取値 $\sqrt{x^2+k^2}$.

我们可把它写作：

$$\frac{1}{z\sqrt{z^2+k^2}}=L[u(t)]L[u(t)J_0(kt)]$$
$$=L\left[u(t)\int_0^t J_0(k\tau)\,d\tau\right].$$

所以，所求的函数为 $u(t)\int_0^t J_0(k\tau)\,d\tau$.

在结束本节时，我们给出 Laplace 变换的简表如下：

$G(z)=L[f(t)]$		$f(t)$
1. $1/z^c$,	$c>0$	$u(t)t^{c-1}/\Gamma(c)$
2. $1/(z-a)$,		$u(t)e^{at}$
3. $1/(z-a)^k$,	$k>0$	$u(t)t^{k-1}e^{at}/\Gamma(k)$
4. $1/(z^2+\omega^2)$,	$\omega>0$	$u(t)\sin\omega t/\omega$
5. $z/(z^2+\omega^2)$,	$\omega>0$	$u(t)\cos\omega t$
6. $1/(z^2-\omega^2)$,	$\omega>0$	$u(t)\sinh\omega t/\omega$
7. $z/(z^2-\omega^2)$,	$\omega>0$	$u(t)\cosh\omega t$
8. $1/[(z-a)^2+\omega^2]$,	$\omega>0$	$u(t)e^{at}\sin\omega t/\omega$
9. $(z-a)/[(z-a)^2+\omega^2]$,	$\omega>0$	$u(t)e^{at}\cos\omega t$
10. $1/\sqrt{z^2+k^2}$,		$u(t)J_0(kt)$
11. $\tan^{-1}(\omega/z)$.	$\omega>0$	$u(t)\sin\omega t/t$
12. $\log(z-a)-\log(z-b)$		$u(t)[(e^{bt}-e^{at})/t]$
13. $\log(z^2+\omega^2)-\log z^2$,	$\omega>0$	$2u(t)[1-\cos\omega t]/t$
14. $\log(z^2-\omega^2)-\log z^2$,	$\omega>0$	$2u(t)[1-\cosh\omega t]/t$

习 题 9.3

1. 某函数的 Laplace 变换为

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)^2(z^2+2z+5)},$$

求此函数。

2. 某函数的 Laplace变换为

$$\frac{z^2+2z+5}{(z^2+2z+2)^2},$$

求此函数。

提示：$L[tf(t)]=-\frac{d}{dt}L[f(t)]$.

3. 验证 Laplace 变换表中的公式 13, 14.

4. 令 $L[f(t)] = P(z)/[(z-a)^2+b^2]$，其中 $P(z)$ 为一具有实系数的三次多项式，且 a, b 均为实数，证明

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1 z + B_1}{(z-a)^2+b^2} + \frac{A_2 z^2 + B_2 z + C_2}{[(z-a)^2+b^2]^2},$$

这里 A_1, B_1, A_2, B_2，以及 C_2 都是实数，试求系数及 $f(t)$ 使得 $P(z)/Q(z) = L[f(t)]$.

9.4 常微分方程的解法

Laplace 变换的最重要的应用之一是解线性常微分方程。我们从具有常数系数的，一般的 n 阶线性方程的研究开始：

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t),$$

其中 $f(t)$ 对于 $t \geqslant 0$ 时有定义，且具有一个 Laplace 变换。我们要求解 $y(t)$，它对于 $t > 0$ 具有 n 阶连续导数，且

$$\lim_{t \to 0+} y^{(k)}(t) = b_k, \quad k = 0, 1, 2 \cdots n-1.$$

如果我们取它的第 j 次的导数，则有：

$$L[y^{(j)}(t)] = z^j Y(z) - z^{j-1} b_0 - z^{j-2} b_1 - \cdots$$
$$- z b_{j-2} - b_{j-1}$$
$$= z^j Y(z) - \sum_{i=0}^{j-1} b_i z^{j-1-i},$$

这里 $Y(z) = L[y(t)]$。变换整个方程，我们有

$$Y(z) \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = F(z) + \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} b_i z^{k-1-i}$$
$$= F(z) + P(z),$$

这里 $F(z) = L[f(t)]$，而 $P(z)$ 为一个 $n-1$ 次多项式。所以

$$Y(z) = F(z)/Q(z) + P(z)/Q(z),$$

其中 $Q(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$，令 $1/Q(z)=L[q(t)]$，这里 $q(t)$ 由定理 9.3.2 应包含形如 $t^m e^{at}$ 的项。其中 m 是一个非负的整数。所以由卷积定理，得

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)q(t-\tau)d\tau+L^{-1}[P(z)/Q(z)].$$

若令 $y_p(t)=\int_0^t f(\tau)q(t-\tau)d\tau$，则易知对于连续的 $f(t)$，$t\geqslant 0$，$y_p(t)$ 是原方程满足 $\lim\limits_{t\to 0^+} y_p^{(k)}(t)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$ 的一个特解。另一方面，$y_c(t)=L^{-1}[P(z)/Q(z)]$是齐次方程

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=0$$

满足 $y_c^{(k)}(0)=b_k$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 的一个解。由定理 9.3.2 $y_c(t)$具有形状为 $t^m e^{at}$ 的项。其中m是一个非负的整数。我们称 $y_c(t)$为补解。

例 9.4.1． 考虑图 9.4.1 中所示之电路。电流 $I(t)$ 满足的微分方程是

$$H\frac{d^2 I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{c}=\frac{d}{dt}E(t)$$

其中电感H，电阻R及电容C都是常数，且 $E(t)$是输入电压。

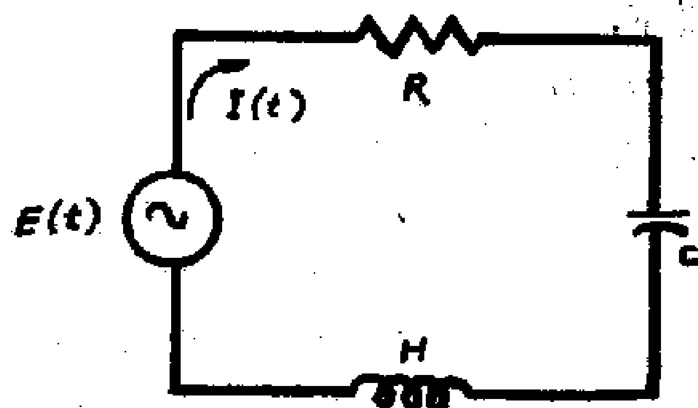


图 9.4.1

令 $E(t)=E_0\sin\omega t$，其中 E_0 及 ω 都是常数。设 $I(0)=I_0$ 及 $I'(0)=I'_0$，解 $I(t)$. 变换方程，我们有：

$$H[z^2G(z)-zI_0-I'_0]+R[zG(z)-I_0]+\frac{1}{C}G(z)$$

$$=\frac{\omega E_0 z}{z^2+\omega^2},$$

这里 $G(z)$ 是 $I(t)$ 的 Laplace 变换，那么

$$G(z)=\frac{\omega E_0 z}{(z^2+\omega^2)\left(Hz^2+Rz+\frac{1}{C}\right)}+\frac{HI_0z+HI'_0+RI_0}{\left(Hz^2+Rz+\frac{1}{C}\right)}$$

补解的那一部分的 Laplace 变换是：

$$\frac{HI_0z+HI'_0+RI_0}{Hz^2+Rz+\frac{1}{C}}$$

$$=\frac{I_0z+I'_0+RI_0/H}{[z+(R/2H)]^2+[(1/HC)-R^2/4H^2]}$$

$$=\frac{I_0z+I'_0+RI_0/H}{(z+\alpha)^2+\omega_0^2}.$$

我们有以下三种不同的情况：

情况 I　欠阻尼　$\omega_0^2=1/HC-R^2/4H^2>0$.

在这情况下，

$$\frac{I_0z+I'_0+RI_0/H}{(z+\alpha)^2+\omega_0^2}=\frac{I_0(z+\alpha)}{(z+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$+\frac{[(I'_0-I_0\alpha)/\omega_0+RI_0/\omega_0H]\omega_0}{(z+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$=L[u(t)I_0e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]$$

$$+L[u(t)Ae^{-\alpha t}\sin\omega_0 t].$$

其中

$$A=(I'_0-I_0\alpha)/\omega_0+RI_0/\omega_0H.$$

若

$$R>0,\text{ 则 } \alpha=R/2H>0,$$

并且解的这一部分指数地衰減。如果 α 很大，则它很快的衰減而消失。

情况Ⅱ　临界阻尼　$\omega_0^2=0$；这就是说 $1/HC=R^2/4H^2$．在这情况下，

$$\frac{I_0z+I'_0+RI_0/H}{(z+\alpha)^2}=\frac{I_0(z+\alpha)+I'_0-\alpha I_0+RI_0/H}{(z+\alpha)^2}$$

$$=L[u(t)I_0e^{-\alpha t}]+L[u(t)Bte^{-\alpha t}],$$

其中 $B=I'_0-\alpha I_0+RI_0/H$．因为 $\alpha=R/2H>0$，解的这部分如同情况Ⅰ那样指数地衰減，但沒有相同的振盪性质。

情况Ⅲ　过阻尼　$\omega_0^2=\frac{1}{HC}-R^2/4H^2=-\beta^2<0.$

在这情况下，

$$\frac{I_0z+I'_0+RI_0/H}{(z-\alpha)^2-\beta^2}=\frac{I_0(z+\alpha)+I'_0-\alpha I_0+RI_0/H}{(z+\alpha)^2-\beta^2}$$

$$=L[u(t)I_0e^{-\alpha t}\cosh\beta t]$$

$$+L[u(t)De^{-\alpha t}\sinh\beta t],$$

其中 $D=(I'_0-I_0\alpha)/\beta+RI_0/\beta H$．解的这一部分指数地衰減，因为

$$e^{-\alpha t}\cosh\beta t=\frac{1}{2}[e^{-(\alpha-\beta)t}+e^{-(\alpha+\beta)t}],$$

$$e^{-\alpha t}\sinh\beta t=\frac{1}{2}[e^{-(\alpha-\beta)t}-e^{-(\alpha+\beta)t}],$$

以及 $\alpha+\beta=R/2H+\sqrt{R^2/4H^2-1/HC}>0$，并且 $\alpha-\beta=R/2H-\sqrt{R^2/4H^2-1/HC}>0$．显然，$R$ 愈大，这部分解衰減更快。

对应于

$$\omega E_0 z/(Hz^2+Rz+1/C)(z^2+\omega^2)$$

的那一部分解可利用定理 9.3.4 确定。它们是变换中以下形式的项：$\omega/(z^2+\omega^2)$及 $z/(z^2+\omega^2)$，并分别对应着 $\sin\omega t$ 与 $\cos\omega t$. 为了确定解中这些项的系数，我们应计算

$$L_1=\lim_{z\to i\omega}\frac{\omega E_0 z}{Hz^2+Rz+1/C}=\frac{i\omega^2 E_0}{-\omega^2 H+R\omega i+1/C}$$

$$=\frac{i\omega E_0}{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega H\right)+Ri}$$

$$=\omega E_0\left[\frac{R}{R^2+\left(\omega H-\frac{1}{\omega C}\right)^2}-\frac{\left(\omega H-\frac{1}{\omega C}\right)i}{R^2+\left(\omega H-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\right].$$

令 $X=\omega H-\frac{1}{\omega C}$（我们称它为电抗），以及 $z=R+iX$（我们称它为复数阻抗）。则

$$L_1=\frac{\omega E_0}{|z|}\left[\frac{R}{|z|}-\frac{iX}{|z|}\right],$$

且

$$\frac{\omega E_0 z}{(Hz^2+Rz+1/C)(z^2+\omega^2)}$$

$$=L\left[u(t)\frac{E_0}{|z|}\left(\frac{R}{|z|}\sin\omega t-\frac{X}{|z|}\cos\omega t\right)\right]+\text{其他项}$$

$$=L\left[u(t)\frac{E_0}{|z|}\sin(\omega t-\phi)\right]+\text{其他项},$$

其中 $\cos\phi=R/|z|$ 且 $\sin\phi=X/|z|$，这就是说，$\phi=\arg z$，且"其他项"是指在情况 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 中所遇到过的那些类型的项。

为了我们的目的，我们将要把这些"其他项"合并到补解中去，并写作：

$$I(t)=\frac{E_0}{|z|}\sin(\omega t-\phi)+\text{暂态解},$$

其中"暂态解"为以下形式的解：

情形 I　$Me^{-\alpha t}\cos\omega_0 t+Ne^{-\alpha t}\sin\omega_0 t.$

情形 II　$Me^{-\alpha t}+Nte^{-\alpha t}.$

情形 III　$Me^{-(\alpha+\beta)t}+Ne^{(-\alpha+\beta)t}.$

它们依赖于是欠阻尼、临界阻尼、过阻尼的情况而定。而解 $(E_0/|z|)\sin(\omega t-\phi)$ 这一部分称为稳态解。因为这一部分解在很长的时间以后，当暂态解衰减而消失后，它们仍将保留下来。

Laplace 变换还有效地可用来解常微分方程组。考虑图 9.4.2 中所示的电路

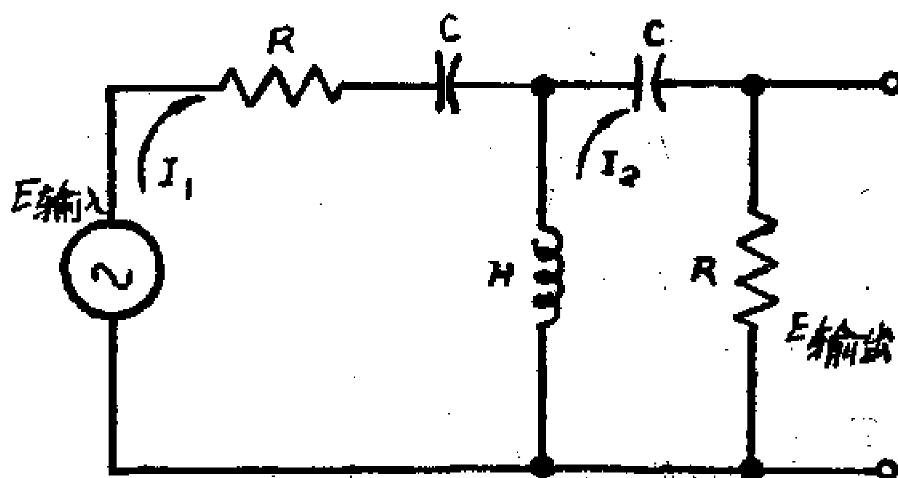


图 9.4.2

例 9.4.2. 让我们假设初始电流为零，并且电容没有充电。因此电流必须满足方程

$$E_{输入}=RI_1+(1/C)\int_0^t I_1 d\tau+H\frac{dI_1}{dt}-H\frac{dI_2}{dt},$$

$$0=RI_2+H\frac{dI_2}{dt}-H\frac{dI_1}{dt}+(1/C)\int_0^t I_2 d\tau.$$

取上述两方程的拉普拉斯变换，我们有

$$E_{in}=RI_1+\frac{1}{Cz}I_1+HzI_1-HzI_2,$$

$$0=RI_2+\frac{1}{Cz}I_2+HzI_2-HzI_1,$$

这里，为简单起见，我们已令 E_{in}，I_1及 I_2 代表它们各自对应的 Laplace 变换。解出 I_1 及I_2，我们有

$$I_1=\frac{E_{in}\left[Hz+R+\frac{1}{Cz}\right]}{\left(Hz+R+\frac{1}{Cz}\right)^2-H^2z^2},$$

$$I_2=\frac{E_{in}zH}{\left(Hz+R+\frac{1}{Cz}\right)^2-H^2z^2},$$

$$E_{out}=RI_2=\frac{zHR}{\left(Hz+R+\frac{1}{Cz}\right)^2-H^2z^2}E_{in}$$

$$\triangleq T(z)E_{in}$$

其中

$$T(z)=\frac{z^3HR}{2HRz^3+\left(\frac{2H}{C}+R^2\right)z^2+\frac{2R}{C}z+\frac{1}{C^2}}$$

称为网络的"传递函数"。将问题写作 $E_{out}=T(z)E_{in}$ 的形式的公式具有某些优点，即给定输入电压的 Laplace 变换后，我们可以很容易地求出输出电压的 Laplace 变换，由它可以用逆变换求出输出电压，在此需要注意的重要事项是应用 Laplace 变换求解常微分方程组的问题转化为解代数方程组。对于分析

更复杂的网络时，线性代数与矩阵的知识是重要的。因此，我们不再讨论这个问题。

传递函数有如下的解释；设 $E_{in}=u(t)$，则 E_{in} 的Laplace变换是 $1/z$，而 E_{out} 的 Laplace 变换为 $T(z)/z$. 所以

$$\frac{T(z)}{z}=L[A(t)],$$

其中 $A(t)$ 是当输入为单位阶跃函数时网络的"响应"。如果微分原方程，我们有

$$\frac{dE_{in}}{dt}=R\frac{dI_1}{dt}+\frac{1}{C}I_1+H\frac{d^2I_1}{dt^2}-H\frac{d^2I_2}{dt^2},$$

$$0=R\frac{dI_2}{dt}+H\frac{d^2I_2}{dt^2}-H\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{1}{C}I_2$$

并取它们的变换，有：

$$E'_{in}=zRI_1+\frac{1}{C}I_1+z^2HI_1-z^2HI_2,$$

$$0=zRI_2+\frac{1}{C}I_2+z^2HI_2-z^2HI_1,$$

$$E_{out}=RI_2=E'_{in}=\frac{T(z)}{z}.$$

利用卷积定理，我们得到

$$E_{out}=\int_0^t E'_{in}(\tau)A(t-\tau)d\tau.$$

$A(t)$ 称为网络的导纳。

网络分析的一个重要问题是所谓"黑箱"问题。假设给出一个"黑箱"，它包含一个网络，并设我们只知道组成网络的元素，即电阻、电容和电感。并假设有两输入端和两输出端。在十分一般的条件下我们可用单位阶跃函数通过网络来确定网络的响应，并由此确定网络的导纳。那末，一般说来，其输出

由卷积给出：

$$E_{out}=\int_0^t E'_{in}(\tau)A(t-\tau)d\tau.$$

确定网络的传递函数的问题通常称为网络分析，而给定传递函数的情况下实现网络的问题称为网络的综合。

习　题 9.4

1．应用拉普拉斯变换解微分方程

$$y''+3y'+2y=e^{-t},\ t>0,$$

其初始条件为

$$y(0^+)=y_0 \text{ 及 } y'(0^+)=y'_0.$$

2．应用拉普拉斯变换解微分方程

$$y''+\omega_0^2y=\sin\omega t,\ t>0,\ \omega\neq\omega_0,$$

其初始条件为

$$y(0^+)=y'(0^+)=0.$$

再考虑 $\omega=\omega_0$ 的情况。

3．用拉普拉斯变换解积微分方程

$$y'+\int_0^t y(\tau)d\tau=e^{-t},\ t>0,$$

初始条件为

$$y(0^+)=y_0.$$

4．解方程组：

$$x'+y'-x+3y=e^{-t},\ x'+y'+2x+y=e^{-2t},\ t>0,$$

初始条件为

$$x(0^+)=x,y(0^+)=y_0.$$

9.5 稳定性

如果一个已给的线性系统的输出是用一个常系数的线性常

微分方程的解表示的，那末它的 Laplace 变换为如下的形式：

$$Y(z)=F(z)/Q(z)+P(z)/Q(z),$$

其中

$$Q(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,$$

其中 a_i，$i=0,1\cdots,n$ 是微分方程的系数，我们假设它们是实常数，$F(z)$ 是微分方程的强迫项(输入项)的变换。并且 $P(z)$ 是 $n-1$ 阶的多项式，它包含初始条件。我们称 $P(z)/Q(z)$ 的逆变换为方程的补解。并且已经看到对应于 $Q(z)$ 的一个 m 次的实的重根 r，是形式为如下的项：

$$(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_{m-1}t^{m-1})e^{rt},$$

这里系数 $A_i, i=0,1\cdots,m-1$ 是依赖于初始条件的，若 $r<0$，则不论初始条件为何，这一项当 $t\to\infty$ 时趋于零。$|r|$ 愈大，这一项也将衰减愈快。若 $r+iq$ 是一个 m 次的重复根。则在补解中这一项有如下的形式：

$$[A_0\cos qt+B_0\sin qt+t(A_1\cos qt+B_1\sin qt)+\cdots$$
$$+t^{m-1}(A_{m-1}\cos qt+B_{m-1}\sin qt)]e^{rt}.$$

又若 $r<0$，这些项将随时间的增加而衰减。如同我们在例 9.4.1 中看到的，在

$$y_p(t)=L^{-1}[F(z)/Q(z)]$$

中也具有这种形状的项。虽然一般地，甚至在 $Q(z)$ 的零点的实部都是负的时，也有一些项并不衰减。这些不衰减的项我们曾称它们为"稳态解"。那些包含 e^{r_jt} 的项(其中 $r_j=\text{Re}(z_j)$，z_j 是 $Q(z)$ 的一个零点.)构成了我们曾称为的"暂态解"。若 $j<0$ 对一切的 j 成立，暂态解成为真正的瞬变过程，而在这情况下，稳态解在一个合理的时刻之后变成了输出的决定部分。

绝大多数的系统都有随机的波动，它们都不是输入的部分。它们给出了一组新的初始条件，并有引入暂态的趋势。如果这些暂态衰减下去而成为稳态，我们就说这个系统是稳定

的。由我们上面所说的，我们有下述稳定性的判别准则：

如果一个线性系统的输出是常系数常微分方程

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=f(t)$$

的一个解，则当且仅当

$$Q(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

的一切根都具有负的实部时是稳定的。

例 9.5.1. 设一系统有输出 $y(t)$，其中

$$ay''+by'+cy=f(t),$$

证明当且仅当 a，b，和 c 都具有相同的符号时系统是稳定的。

不妨设 $a>0$，因为若不然，可以乘以 -1。设 $az^2+bz+c=0$ 具有实根 r_1 及 r_2，则

$$z^2+\left(\frac{b}{a}\right)z+\left(\frac{c}{a}\right)=(z-r_1)(z-r_2)$$

$$=z^2-(r_1+r_2)z+r_1r_2,$$

且 $(b/a)=-(r_1+r_2)$，$(c/a)=r_1r_2$。若 r_1, r_2 两者都是负的，则 $b>0$，$c>0$。反之，若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则 r_1, r_2 必须是负的。若 $az^2+bz+c=0$ 有复根 $r+iq$，则

$$z^2+\left(\frac{b}{a}\right)z+\left(\frac{c}{a}\right)=(z-r-iq)(z-r+iq)$$

$$=z^2-2rz+r^2+q^2,$$

显然，当且仅当 $b>0$ 及 $c>0$ 时 $r<0$。

在例 9.4.2 中，我们考虑了更复杂的系统，但不论如何，我们总能把解写成如下的形式：

$$E_{out}=T(z)E_{in},\ T(z)=\frac{R(z)}{Q(z)},$$

其中 $T(z)$ 是 z 的具有实系数的有理函数。在这个例中，我们把所有的初始条件都设为零，然而，如果我们从非零的初始条

件开始，那末，在解中将引入形如 $P(z)/Q(z)$ 的一项，其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 是实系数的多项式，并且 $P(z)$ 的次数低于 $Q(z)$ 的次数。因此，这里解有与上面的讨论中有相同的考虑。这里将有一个来自 $T(z)\,E_{in}(z)$ 的稳态解，来自 $T(z)E_{in}(z)$ 及 $P(z)/Q(z)$ 的暂态解。而稳定性的判别准则与前相同，即多项式 $Q(z)$ 的根的实部是负的。

例 9.5.2．证明例 9.4.2 中的系统是稳定的。

在这情况下，

$$Q(z)=2HRz^3+\left(\frac{2H}{C}+R^2\right)z^2+\frac{2R}{C}z+\frac{1}{C^2}.$$

如果 $Q(z)=az^3+bz^2+cz+d$，可证（习题 9.5.2）当且仅当 $a>0$，$c>0$，$d>0$，以及 $bc-ad>0$ 时，$Q(z)$ 有实部为负数的根。这里

$$a=2HR>0,\ c=2R/C>0,\ d=\frac{1}{C^2}>0,$$

且

$$bc-ad=\left(\frac{2H}{C}+R^2\right)\frac{2R}{C}-\frac{2HR}{C^2}=\frac{2R^3}{C}+\frac{2HR}{C^2}>0.$$

我们将给出两个等价的稳定性判别准则；其一是代数性质的，另一个是函数理论上的。我们曾看到在上面每一种情况中，系统的稳定性依赖于多项式 $Q(z)$ 的零点的位置。我们称方程 $Q(z)=0$ 为系统的“特征方程”。

Hurwitz 稳定性判别准则：设

$$Q(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

是一个线性系统的特征方程，其中 a_i，$i=0,1,\cdots,n$ 是实数，并且 $a_0>0$．则当且仅当下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}$$

为正的时系统是稳定的。

这个准则的证明与证明 $Q(z)$ 的所有根的实部为负数的充要条件是一致的。它是代数性质的，我们在这里不准备给出*。$n=2$ 的情况见例 9.5.1，$n=3$ 的情况见习题 9.5.2

Nyquist 稳定性判别准则：**

设

$$Q(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

为线性系统的特征方程，其中 $a_i, i=0,1,\cdots,n$ 是实数，且 $Q(z)$ 在虚轴上没有零点。则当且仅当 y 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时 $Q(iy)$ 的幅角的改变为 $n\pi$ 时系统是稳定的。

它的证明是建立在幅角原理上，即定理 5.3.1. 若系统是稳定的，则 $Q(z)$ 的零点均位于左半平面 $\mathrm{Re}(z)<0$. 我们在虚轴上以及右半平面中沿着半径为 R 的大半园弧上应用幅角原理，则 $\Delta\arg Q(z)=0$. 对于充分大的 R，起决定作用的项是 $a_nR^ne^{in\theta}$，并且 $\Delta\arg a_nR^ne^{in\theta}=n\pi$. 因此，当 y 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时 $\Delta\arg Q(iy)=n\pi$. 显然，其逆也真。

例 9.5.3. 证明由特征方程 $Q(z)=z^3+2z^2+z+1=0$ 所控制的系统是稳定的。

由于

---

* 参看 J.V.Uspensky, Theory of Equations, New York: McGraw-Hill Book Company Inc. 1948, pp. 304-309.

** 这里不是通常给出的 Nyquist 判别准则的严格形式，但由于采用了相同的基本概念，我们将有更为自由的、广义的形式，因而也是可信的。

$$Q(iy)=-iy^3-2y^2+iy+1,\ \arg Q(iy)$$
$$=\tan^{-1}(y-y^3)/(1-2y^2).$$

开始，当 $y=-\infty$ 时，我们取$\arg(iy)=-\pi/2$，以后当 y 增加到∞时考虑 $\arg Q(iy)$ 的改变。肯定地说，我们取 $\tan^{-1}$ 的值要在 $\arg Q(iy)$ 中连续的改变，其结果为

$$\Delta\arg Q(iy)=3\pi,$$

这表示系统是稳定的。

对于控制工程师来说，当系统中产生反馈时，常常出现重要的稳定性问题。现在用框图把这系统表示出来(见图9.5.1)。

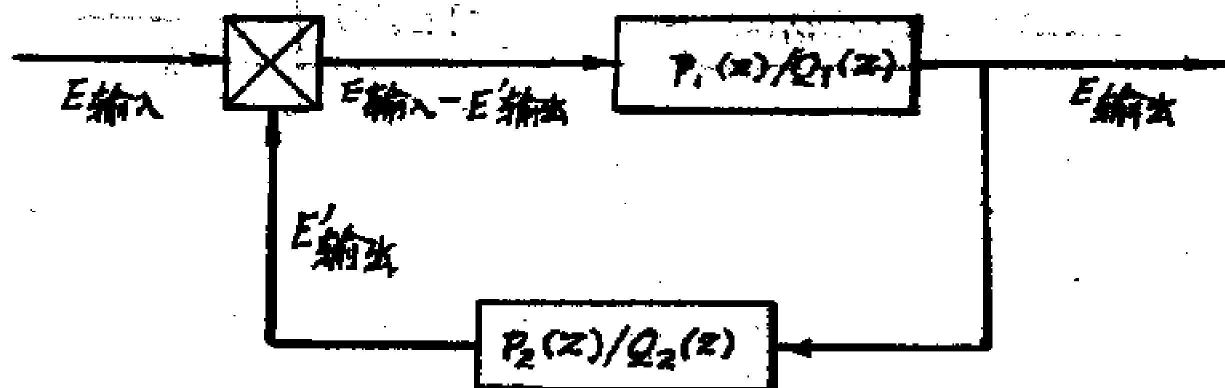


图 9.5.1

E_{in} 是输入，它馈入到一个分量中去，并从输入减去反馈 E'_{0ut}。其结果形成一个线性器件，其传递函数为 $P_1(z)/Q_1(z)$。输出经过一个装置反馈回去，这装置的传递函数为

$$P_2(z)/Q_2(z),$$

它产生反馈 E'_{0ut}。系统方程为

$$E_{out}=\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}(E_{in}-E'_{out}),$$

$$E'_{0ut}=\frac{P_2(z)}{Q_2(z)}E_{out},$$

其中诸 E'_s 量现在代表变换。我们并假设初始条件均为零。解出 E_{out}，我们有

$$E_{out}=\frac{P_1Q_2}{P_1P_2+Q_1Q_2}E_{in},$$

因此，系统的特征方程为

$$P_1(z)P_2(z)+Q_1(z)Q_2(z)=0$$

并且我们可以用上述中的任何一个判别准则确定系统的稳定性。

假如被减的元素消失，我们这时有以下的系统：（见图9.5.2）



图 9.5.2

因此

$$E'_{out}=\frac{P_1(z)P_2(z)}{Q_1(z)Q_2(z)}E_{in}.$$

它叫做开环系统。因此开环系统的特征方程为

$$Q_1(z)Q_2(z)=0.$$

让我们假设开环是稳定的。所以对于 $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$，$Q_1(z)Q_2(z)$ 没有零点。考虑

$$R(z)=\frac{P_1(z)P_2(z)+Q_1(z)Q_2(z)}{Q_1(z)Q_2(z)}=\frac{P_1(z)P_2(z)}{Q_1(z)Q_2(z)}+1.$$

如果我们围绕着由虚轴加上右半平面上的大园弧所组成的围道对于 $R(z)$ 应用幅角原理，可得

$$\mathop{\Delta\arg R(iy)}_{-\infty<y<\infty}+\mathop{\Delta\arg R(z)}_{\text{半园弧}}=2\pi(N-M),$$

其中 N 是 Q_1Q_2 在右半平面中的零点的数目，而 M 是 $P_1P_2+Q_1Q_2$ 在右半平面中的零点的个数。由于闭环的稳定性，$N=0$，因而得到 $M=0$. 实际上，P_1 的次数是小于或等于 Q_1 的次

数，并且 P_2 的次数小于或等于 Q_2 的次数，所以 P_1P_2 的次数小于或等于 Q_1Q_2 的次数。并且有

$$\lim_{z\to\infty}P(z)=1+\lim_{z\to\infty}\frac{P_1(z)P_2(z)}{Q_1(z)Q_2(z)},$$

它为有限值。由于这个理由，虚轴在 $w=R(z)$ 的变换下，其映象为一闭曲线，且若开环为稳定的以及 $\underset{-\infty<y<\infty}{\Delta\arg}R(iy)=0$ 时，反馈系统是稳定的。如果在 w 平面上的闭曲线 $w=R(iy)$ 不包含原点在内，上述结论是正确的。习惯上，常画出曲线

$$\widetilde{w}=\widetilde{R}(iy),$$

其中

$$\widetilde{R}(z)=\frac{P_1(z)P_2(z)}{Q_1(z)Q_2(z)}.$$

但是由于 $w=\widetilde{w}+1$，故有以下结论：若开环是稳定的，并且曲线 $\widetilde{w}=\widetilde{R}(iy)$ 不包含 -1 在其所围域内，则反馈系统是稳定的。这就是关于反馈系统的 Nyquist 判别准则。

习 题 9.5

1. 若多项式 $Q(z)$ 的系数是实的，且有零点 $r+iq$，证明它有零点 $r-iq$。

2. 证明当且仅当 a, b, c, d 及 $bc-ad$ 有相同符号时，az^3+bz^2+cz+d 的零点在左半平面内。

3. 某个系统的特征方程为 $z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$，利用 Nyquist 判别准则确定系统的稳定性。

4. 当开环为不稳定时，其反馈系统是否仍有可能是稳定的？

提示：考虑 $N\neq0$ 的情形，推广 Nyquist 判别准则，并处理此种情况。

9.6 偏微分方程的解法

在第 8.6 节中，我们已说明怎样用 Fourier 变换去解偏微分方程的某些问题。因为 Laplace 变换恰恰是一个在复平面上旋转 $\pi/2$ 的单边 Fourier 变换，因此，毫不奇怪，Laplace 变换可以用以解偏微分方程。事实上，其方法实质上与以前的一样。然而，我们仍然举出两个例子说明用 Laplace 变换解题的方法。

例 9.6.1. 试求一根半无限长的弹性弦的位移，它开始时静止于其平衡位置，并在 $x=0$ 处及 $t=0$ 时，给一位移如下：$u(0,t)=f(t)$，问题可确定如下：

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{tt}, && x>0, && t>0,\\
&u(x,0)=0, && && x\geqslant 0,\\
&u_t(x,0)=0, && && x\geqslant 0,\\
&u(0,t)=f(t), && && t\geqslant 0,\\
&\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0, && && t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

关于时间变量 t，作变换，令

$$U(x,z)=\int_0^\infty u(xt)e^{-zt}dt.$$

则

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{z^2}{a^2}U=0.$$

解出 $U(x,z)$，我们得

$$U(x,z)=Ae^{(z/a)x}+Be^{-(z/a)x}$$

变换在一个右半平面内存在。因此，对于

$$\mathrm{Re}(z)>c>0,\quad \lim_{x\to\infty}U(x,z)=0,$$

这就导致 $A=0$. 现在

$$U(0,z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt=F(z)=B,$$

且由定理 9.2.6 得

$$U(x,z)=F(z)e^{-(z/a)x},$$

$$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a}\right)u\left(t-\frac{x}{a}\right),$$

其物理解释为：位移在弦上以速度 a 传播；即在未传播到 $x=at$ 之前，在此点处没有位移，而其后，这点的位移是由端点所产生的位移传来的。如果设 $f(t)$ 是两次可微的，可证这就是方程的解。

例 9.6.2. 试求半无限长的弹性弦的位移，其端点是固定的，并有初始位移 $u(x,0)=g(x)$，并且没有初始速度。

问题可写作下面的形式：

$$\begin{aligned}
&u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{tt}, \qquad x>0, \qquad t>0,\\
&u(x,0)=g(x), \qquad x\geqslant 0,\\
&u_t(x,0)=0, \qquad x\geqslant 0,\\
&u(0,t)=0, \qquad t\geqslant 0,\\
&\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0, \qquad t\geqslant 0.
\end{aligned}$$

我们关于时间 t 取变换，

$$U(x,z)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-zt}dt,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{z^2}{a^2}U=-\frac{z}{a^2}g(x).$$

这方程可以用常数变易法求解。利用边界条件 $U(0,z)=0$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}U(x,z)=0$，可得

$$
\begin{aligned}
U(x,z)=&\frac{1}{2a}\int_0^x g(\xi)\left[e^{-(z/a)(x-\xi)}-e^{-(z/a)(x+\xi)}\right]d\xi\\
&+\frac{1}{2a}\int_x^\infty g(\xi)\left[e^{-(z/a)(\xi-x)}-e^{-(z/a)(x+\xi)}\right]d\xi\\
=&\frac{1}{2}\int_0^\infty g(x+a\eta)e^{-z\eta}d\eta+\frac{1}{2}\int_0^{(x/a)} g(x-a\eta)e^{-z\eta}d\eta\\
&-\frac{1}{2}\int_{(x/a)}^\infty g(a\eta-x)e^{-z\eta}d\eta.
\end{aligned}
$$

在这里最好是把函数 $g(x)$ 延拓成为奇函数；即对于 $x<0$，定义 $g(x)=-g(-x)$，则

$$
\begin{aligned}
U(x,z)=&\frac{1}{2}\int_0^\infty g(x+a\eta)e^{-z\eta}d\eta\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\infty g(x-a\eta)e^{-z\eta}d\eta.
\end{aligned}
$$

我们可立即得出它们是以下函数

$$
u(x,t)=\frac{1}{2}g(x+at)+\frac{1}{2}g(x-at)
$$

的变换，其中 $g(x)$ 在第二项中必须理解为奇函数，如果 $g(x)$ 是两次可微分，可证这就是问题的解。

习 题 9.6

1. 求方程 $U_{xx}-(z^2/a^2)U=-(z/a^2)g(x)$ 的解 $U(x,z)$，它满足以下初始条件：$U(0,z)=0$，及 $\lim\limits_{x\to 0}U(x,z)=0$，其中 $\operatorname{Re}(z)>c\geqslant 0$。

2. 在例 9.6.2 中，若初始速度为 $u_t(x,0)=h(x)$，但初位移为零，解方程。

3. 利用例 9.6.1，9.6.2 及习题 9.6.2 证明下述问题是

可解的：

$$u_{xx}=(1/a^2)u_{tt},\qquad x>0,\qquad t>0;$$
$$u(x,0)=g(x),\qquad u_t(x,0)=h(x),$$
$$u(0,t)=f(t),\qquad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0.$$

4. 利用 Laplace 变换，对于在两端 $x=0$ 及 $x=1$ 处固定的弹性弦，若无初始速度，但有初始位移 $u(x,0)=A\sin\pi x$，求弹性弦的位移。

9.7 积分方程的解法

由于 Laplace 变换所取的卷积定理的形式（参看定理 9.2.7）与Fourier 变换所取的卷积定理的形式（参看 8.3 节）不同，所以易于用 Laplace 变换求解的积分方程也有所不同，现在让我在 $t>0$ 时求解下述的 Volterra 积分方程：

$$u(t)=f(t)+\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

其中 $u(t)$ 是待求函数。设当 $R(z)>0$ 时 $f(t)$ 与 $k(t)$ 的 Laplace 变换分别为 $F(z)$ 与 $K(z)$，那末，如果 $U(z)$ 是 $u(t)$ 的 Laplace 变换，则

$$U(z)=F(z)+K(z)U(z)$$

或

$$U(z)=\frac{F(z)}{1-K(z)}.$$

例 9.7.1. 解积分方程

$$u(t)=1-\int_0^t(t-\tau)u(\tau)d\tau,\quad t>0.$$

由于这里 $f(t)=1$，且 $k(t)=t$，所以

$$U(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}U(z),$$

$$U(z)=\frac{z}{z^2+1},$$

或

$$u(t)=\cos t.$$

Laplace 变换对于求解某些第一类的积分方程很有效。即，对未知函数仅出现在积分号下的情形。例如，当 $t>0$ 时求满足

$$f(t)=\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

的 $u(t)$. 假设 $R(z)>a$ 时 $f(t)$ 与 $k(t)$ 有 Laplace 变换，它们分别为 $F(z)$ 与 $K(z)$，那么

$$F(z)=K(z)U(z),$$

其中 $U(z)$ 为 $u(t)$ 的变换，则

$$U(z)=\frac{F(z)}{K(z)}.$$

例 9.7.2： 求解 *Abel* 积分方程：

$$f(t)=\int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

这里 $f(t)$ 是已知的，并设它的 Laplace 变换是 $F(z)$，又 $k(t)=t^{-1/2}$，它有变换为 $\Gamma(1/2)z^{-1/2}$，因此

$$F(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,U(z)}{\sqrt{z}},$$

$$U(z)=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\pi}}F(z)=\frac{z}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}F(z)\right)=\frac{z}{\pi}K(z)F(z).$$

所以，由定理 9.2.2 及 9.2.7，

$$u(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

除非 $f(t)$ 是已知的，否则我们不能具体把它的导数写出来。例

如，若设 $f(t)=t$，则

$$\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = \frac{4}{3}t^{3/2},$$

$$u(t) = \frac{2}{\pi}t^{1/2}.$$

习 题 9.7

1. 解积分方程：$u(t)=1+\int_0^t (t-\tau)^2 u(\tau)d\tau$，$t\geqslant 0$.

2. 解广义 *Abel* 积分方程：

$$f(t)=\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \qquad 0<\alpha<1.$$

3. 写出解积分方程组

$$u_1(t)=f(t)+\int_0^t k_1(t-\tau)u_1(\tau)d\tau+\int_0^t k_2(t-\tau)u_2(\tau)d\tau,$$

$$u_2(t)=g(t)+\int_0^t k_3(t-\tau)u_1(\tau)d\tau+\int_0^t k_4(t-\tau)u_2(\tau)d\tau.$$

的方法。

第十章　渐近展开式

10.1　引言与定义

为了引进渐近展开式的概念，让我们考虑函数

$$\int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{-1}dt.$$

这是 $(1+t^2)^{-1}$ 的 Laplace 变换，因此它在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时是解析的，一个初学者可能会想起要去展开 $(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-\cdots$ 并逐项积分。第 n 项是：

$$\int_0^\infty e^{-zt}(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{z^{2n-1}}.$$

其结果是得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{z^{2n-1}}$. 但这是没有意义的，因为展开式 $(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-\cdots$ 仅仅在 $|t|<1$ 时收敛。而且事实上，所得的级数对一切 z 都是发散的！

另一方面，如果我们写出：

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

由于这是有限和，我们可以逐项积分，所以

$$\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t^2}dt=\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{4!}{z^5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{z^{2n-1}}+R_n(z),$$

其中

$$R_n(z)=(-1)^n\int_0^\infty \frac{e^{-zt}t^{2n}}{1+t^2}dt.$$

现在，

$$|R_n(z)|=\left|\int_0^\infty \frac{e^{-zt}t^{2n}}{1+t^2}dt\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-xt}t^{2n}\,dt=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}.$$

令 $z\neq0$，并且 $-(\pi/2)+\alpha\leqslant\arg z\leqslant(\pi/2)-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$. 则 $x\geqslant|z|\sin\alpha$. 所以

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{(2n)!}{(\sin\alpha)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{|z|^{2n+1}}.$$

对于固定的 n，$\lim\limits_{|z|\to\infty}|R_n(z)|=0$. 因此，虽然级数对一切 z 都是发散的，但是，对于充分大的 $|z|$，级数的有限项的和仍然是函数的一个好的逼近。在这情况下，我们说级数 $\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{4!}{z^5}-\cdots$ 是已知函数的一个渐近展开，并写作：

$$\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t^2}dt\sim\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{4!}{z^5}-\cdots,$$

其中 $z\neq0$，且 $-(\pi/2)+\alpha\leqslant\arg z\leqslant(\pi/2)-\alpha$.

求得这个展开式的另一个方法是用分部积分法。对于 $\mathrm{Re}(z)>0$，若 $f(t)=(1+t^2)^{-1}$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt&=\frac{e^{-zt}}{-z}f(t)\Big|_0^\infty+\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}f'(t)\,dt\\&=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}f'(0)+\frac{1}{z^2}\int_0^\infty e^{-zt}f''(t)\,dt\\&=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}f''(0)+\frac{1}{z^3}\int_0^\infty e^{-zt}f'''(t)\,dt\\&=\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{1}{z^4}f'''(0)+\frac{1}{z^4}\int_0^\infty e^{-zt}f^{(4)}(t)\,dt\\&=\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{4!}{z^5}-\cdots+\frac{1}{z^{2n-1}}f^{(2n-2)}(0)\\&\quad+\frac{1}{z^{2n}}\int_0^\infty e^{-zt}f^{(2n)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

易于证明 $|f^{(2n)}(t)|\leqslant(2n)!$。所以

$$\left|\frac{1}{z^{2n}}\int_0^{\infty}e^{-zt}f^{(2n)}(t)dt\right|\leqslant\frac{(2n)!}{|z|^{2n}}\int_0^{\infty}e^{-zt}dt$$

$$\leqslant\frac{(2n)!}{(|z|\sin\alpha)^{2n+1}},$$

其中 $z\neq0$，$-\pi/2+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi/2-\alpha$。

现在我们给出什么叫做渐近展开式的精细的定义。设R是延拓的复平面中的一个域，z_0 为R的一个极限点。

定义 10.1.1. 一个有限或无限的函数序列 $\{w_n(z)\}$ 在R中对于 $z\to z_0$ 是一个渐近序列是指，如果每一个 $w_n(z)$ 在R中有定义，并且 $w_{n+1}(z)=o(w_n(z))$，这就是说

$$\lim_{z\to z_0}|w_{n+1}(z)/w_n(z)|=0.$$

定义 10.1.2. 设 $f(z)$ 在R中有定义，并设 $\{w_n(z)\}$ 是在R中当 $z\to z_0$ 时的一个渐近序列。如果在R中，当 $z\to z_0$ 时

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z)+o(w_N),$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z)$ 为 $f(z)$ 在R中当 $z\to z_0$ 时的N项渐近展开式。

如果级数是 $f(z)$ 的一个N项的渐近展开式，我们将写作

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z).$$

果如$N=1$，我们将有

$$f(z)\sim a_1w_1(z)=g(z),$$

并说 $g(z)$ 是当 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 的一个“渐近公式”。

定义 10.1.3. 若 $\{w_n(z)\}$ 是R中 $z\to z_0$ 时的一个无限的渐近序列，并且对一切的N，

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z)$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nw_n(z)$ 是 $z\to z_0$ 时的一个渐近级数或渐近展开式，并记作：

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_nw_n(z).$$

定理 10.1.1. 函数 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的渐近展开式 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nw_n(z)$ 的系数，可以确定如下：

$$a_N=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{f(z)-\sum_{n=1}^{N-1}a_nw_n(z)}{w_N(z)}\right\}.$$

证明 由 $N=1$ 开始，此时，我们有

$$f(z)=a_1w_1(z)+g_1(z),$$

其中 $g_1(z)=o(w_1)$，$(z\to z_0)$，用 w_1 除上式，得：

$$a_1=\frac{f(z)}{w_1(z)}-\frac{g_1(z)}{w_1(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{w_1(z)}.$$

若已确定了 $a_1,a_2,\cdots,a_{N-1}$，那末，我们有：

$$f(z)=a_Nw_N(z)+\sum_{n=1}^{N-1}a_nw_n(z)+g_N(z),$$

其中，当 $z\to z_0$ 时 $g_N(z)=o(w_N)$，那末，

$$a_N=\frac{f(z)-\sum_{n=1}^{N-1}a_nw_n(z)}{w_N(z)}-\frac{g_N(z)}{w_N(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{f(z)-\sum_{n=1}^{N-1}a_nw_n(z)}{w_N(z)}\right\}.$$

定理 10.1.2. 设 $f(t), w_1(z), w_2(z), \cdots, w_N(z)$ 在 R 中有定义，设

$$a_N = \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - \sum_{n=1}^{k-1} a_n w_n(z)}{w_k(z)} \right\}$$

对于 $k=1,2,\cdots,N$ 有定义，并且不为零，那末，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(z)$ 是函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的一个 N 项的渐近展开式。

证明 我们必须首先证明 $\{w_n(z)\}$ 是一个渐近序列。由 a_k 的定义，知

$$f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_n w_n(z) = g_k(z) = o(w_k),$$

$$f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_n w_n(z) = a_{k+1} w_{k+1}(z) + h_k(z),$$

其中 $h_k = o(w_{k+1})$，所以

$$(a_{k+1} + h_k/w_{k+1}) w_{k+1} = g_k = o(w_k).$$

但是 $\lim\limits_{z \to z_0} |h_k/w_{k+1}| = 0$，且 $a_{k+1} \neq 0$. 所以存在一个 z_0 的 ε-邻域，使得当 z 在 R 中并在这 ε-邻域中时

$$a_{k+1} + h_k/w_{k+1} \neq 0.$$

因此 $w_{k+1} = o(w_k)$. 最后，所有的这些 a_k 均可用相同的方法确定，而使得：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_n w_n(z) + o(w_k),$$

其中 $k=1, 2, \cdots, N$.

定理 10.1.3. 设 $\{w_n(z)\}$ 是在 R 中对于 $z \to z_0$ 时的一个已给的渐近序列。设 $\sum_{n=1}^{N} a_n w_n(z)$ 是函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的 N 项的渐近展开式，则渐近展开式是唯一的。

证明 若 $\sum_{n=1}^{N} b_n w_n(z)$ 是另一个渐近展开式，则

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{w_1(z)} = a_1,$$

$$b_2 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - a_1 w_1(z)}{w_2(z)} = a_2,$$

等等。

这个定理断言 $f(z)$ 用一已知渐近序列所作出的渐近展开式是唯一的。然而，由于不同的渐近序列，函数 $f(z)$ 可能有许多不同的渐近展开式，例如

$$\frac{z+1}{1-z} \sim 1 + 2z + 2z^2 + \cdots$$

$$\frac{z+1}{1-z} = \frac{(z+1)^2}{1-z^2} \sim (z+1)^2 + (z+1)^2 z^2 + (z+1)^2 z^4 + \cdots$$

当 $z \to 0$ 时两者均为渐近展开式。它们当 $|z| < 1$ 时都是收敛的。但一般说来，渐近展开式可以是收敛的，也可以是发散的。

一个已给的渐近展开式可以是不止一个函数的渐近展开式，例如，令 $w_n(z) = z^{-n}$，则 $\{w_n(z)\}$ 是当 $z \to \infty$ 时的渐近序列。这时因为 $\lim_{z \to \infty} |z^n / z^{n+1}| = 0$. 令 $R = \{z | \mathrm{Re}(z) > 0\}$. 那末，$g(z) = e^{-1/z}$ 在 R 中当 $z \to \infty$ 时有一个渐近于零的渐近展开式。这是因为当 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 时 $\lim_{n \to \infty} z^n e^{-1/z} = 0$. 所以，如果任何另外一个函数 $f(z)$ 在 R 中当 $z \to \infty$ 有一个用 $\{w_n(z)\}$ 表示的渐近展开式，那么，$f(z) + g(z)$ 也有相同的渐近展开式。换言之，一个渐近展开式并不能确定函数，它仅仅确定函数在 R 中靠近 z_0 时的近似值。

定理 10.1.4. 设 $w_n(z) = (z - z_0)^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 在 R 中，当 $z \to z_0$ 时，对于 $f(z)$，如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n+o[(z-z_0)^N]$$

对$N=0,1,2,\cdots$成立，则称$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$是$f(z)$在$R$中当$z\to z_0$时的一个渐近幂级数展开式，记作：

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

易于验证，$\{w_n(z)\}=\{(z-z_0)^n\}$是一个当$z\to z_0$时的渐近序列。因此，这正是渐近展开式中的一般定义的一个特殊情形，一个重要的情形是当$z_0\to\infty$时的情形。在R中，当$z\to\infty$时，如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{z^n}+o(z^{-N}),$$

则在R中$z\to\infty$时，我们记，

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}.$$

习 题 10.1

1. 证明如果$\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z)$是$f(z)$当$z\to z_0$时的一个N项的渐近展开式，则它取1，2，…，$N-1$项时也是一个渐近展开式。

2. 证明$\frac{1}{z}-\frac{2!}{z^3}+\frac{4!}{z^5}-\cdots$是函数

$$\int_0^{\infty}e^{-zt}(1+t^2)^{-1}dt,$$

在$R=\{z|z\neq0,\ -\pi/2+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi/2-\alpha,0<\alpha<\pi/2\}$中，当$z\to z_0$时的一个渐近展开式。

3. 设$f(z)$在z_0处解析。证明$f(z)$的Taylor级数展开

式是 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的一个渐近展开式。

4. 设$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_nw_n(z)$ 在R中当 $z\to z_0$时成立，证明在R中当 $z\to z_0$ 时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nw_n(z)+O(w_{N+1}).$$

换言之，在取N项时所造成的误差与略去的首项同阶。

5. 证明在 $R=\{z|z\neq0,\ -\pi/2+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi/2-\alpha,\ 0<\alpha<\pi/2\}$ 中当 $z\to\infty$时有

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{z+t}dt\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z^n};$$

6. 证明，在$R=\{z|z\neq0,\ -\pi/2+\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi/2-\alpha,\ 0<\alpha<\pi/2\}$ 中，当 $z\to\infty$时有

$$\int_z^{\infty}e^{-t}t^{-1}dt\sim e^{-z}/z.$$

10.2 渐近展开式的运算

在这一节中我们将讨论在渐近展开式中的一些普通的运算，如加法，乘法，除法，微分法，积分法。我们将主要讨论渐近幂级数。

定理 10.2.1. 设

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{N}a_nw_n(z)\ \text{及}\ g(z)\sim\sum_{n=1}^{N}b_nw_n(z)$$

是在R中 $z\to z_0$ 时的两个N项渐近展开式，如果 α, β 是任何复常数，则

$$\alpha f(z)+\beta g(z)\sim\sum_{n=1}^{N}(\alpha a_n+\beta b_n)w_n(z)$$

在R中当 $z\to z_0$ 时成立。

证明 这个结果可立即由

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N}a_n w_n(z)+o(w_N),$$

$$g(z)=\sum_{n=1}^{N}b_n w_n(z)+o(w_N)$$

得到

$$\alpha f(z)+\beta g(z)=\sum_{n=1}^{N}(\alpha a_n+\beta b_n)w_n(z)$$
$$+\alpha o(w_N)+\beta o(w_N),$$

又因为 $\alpha o(w_N)+\beta o(w_N)=o(w_N)$，得证。

推论 10.2.1. 如果在R中，当 $z\to z_0$ 时

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n w_n(z) \text{ 以及 } g(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n w_n(z),$$

则有 $$\alpha f(z)+\beta g(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)w_n(z).$$

定理 10.2.2. 设在R中 $z\to z_0$ 时 $f(z)\sim\sum_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n$ 及 $g(z)\sim\sum_{n=0}^{N}b_n(z-z_0)^n$ 成立，则在R中 $z\to z_0$时有

$$f(z)g(z)\sim\sum_{n=0}^{N}c_n(z-z_0)^n,$$

其中 $$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}.$$

证明 不失一般性，我们取 $z_0=0$，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n z^n+f_N(z),$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{N}b_n z^n+g_N(z),$$

其中 $f_N(z)$ 与 $g_N(z)$为 $o(z^N)$，这时

$$
\begin{aligned}
f(z)g(z)=a_0b_0+(a_0b_1+b_0a_1)z+\cdots \\
+(a_0b_N+a_1b_{N-1}+\cdots \\
+a_{N-1}b_1+a_Nb_0)z^N \\
+g_N\sum_{n=0}^{N}a_nz^n+f_N\sum_{n=0}^{N}b_nz^n \\
+f_N(z)g_N(z) \\
+(a_1b_N+a_2b_{N-1}+\cdots \\
+a_{N-1}b_2+a_Nb_1)z^{N+1} \\
+\cdots
\end{aligned}
$$

显然，在 $(a_0b_N+a_1b_{N-1}+\cdots+a_{N-1}b_1+a_Nb_0)z^N$ 后的一切项都是 $o(z^N)$，这就证明了定理。

推论 10.2.2. 设在R中当 $z\to z_0$ 时

$$
f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ 及 } g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n
$$

则若
$$
c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},
$$
那末
$$
f(z)g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n
$$

在R中当 $z\to z_0$ 时成立。

定理 10.2.3. 在R中当 $z\to z_0$ 时，设

$$
f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ 及 } g(z)\sim\sum_{n=0}^{N}b_n(z-z_0)^n,
$$

其中 $b_0\neq0$，则在形式上 $f(z)$ 的渐近级数可以被 $g(z)$ 的渐近级数去除，并保留到次数为N的项，结果所得到的级数是函数 $f(z)/g(z)$ 的一个N项的渐近幂级数。

证明 不失一般性可设 $z_0=0$。在R中，我们有

$$
f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n+f_N(z),
$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{N}b_nz^n+g_N(z)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N}b_nz^n\right)[1+G_N(z)],$$

其中 f_N 与 g_N 当 $z\to 0$ 时都是 $o(z^N)$，并且

$$G_N(z)=g_N(z)\bigg/\sum_{n=0}^{N}b_nz^n$$

也是 $o(z^N)$，这是因为 $b_0\neq 0$. 所以

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_Nz^N}{b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N}[1+o(z^N)]$$

$$+\frac{f_N(z)}{\sum_{n=0}^{N}b_nz^n}[1+o(z^N)].$$

因此除去 $o(z^N)$ 项不计外

$$\frac{f(z)}{g(z)}\sim\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_Nz^N}{b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N}.$$

右端相除并保留到 $o(z^N)$ 的项为止，我们得到所要的结果。

推论 10.2.3. 设在R中 $z\to z_0$ 时

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad 及 \quad g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,$$

且 $b_0\neq 0$，则在R中当 $z\to z_0$ 时有

$$\frac{f(z)}{g(z)}\sim\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\cdots$$

成立。

定理 10.2.4. 设在R中当$z\to z_0$时$f(z)\sim\sum_{n=0}^{N+1}a_n(z-z_0)^n$，若在$R$中存在一条由点$z_0$到$z$的直线路径，这里$z$充分接近$z_0$，则在$R$中，当$z\to z_0$时

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta\sim\sum_{n=1}^{N+1}\frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n,$$

其中积分是沿着一条直线的路径进行的。

证明

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n+g(z),$$

其中当 $z\to z_0$ 时 $g(z)=O[(z-z_0)^{N+1}]$，那末

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n+\int_{z_0}^{z}g(\zeta)d\zeta.$$

对于充分接近 z_0 的 z，$|g(\zeta)|\leqslant K|z-z_0|^{N+1}$，并且

$$\left|\int_{z_0}^{z}g(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant K\int_{0}^{|z-z_0|}r^{N+1}dr=K\frac{|z-z_0|^{N+2}}{N+2}.$$

所以

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n+o[(z-z_0)^{N+1}],$$

这就证明了定理。

推论 10.2.4. 设在R中当$z\to z_0$时$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. 如果存在一条由 z_0 到 z 的直线路径，其中 z 充分接近 z_0，则在R中，当 $z\to z_0$ 时有

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n$$

成立。

一个重要的特殊情形是$z_0=\infty$时的情形。

定理 10.2.5. 对于 $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$，当 $z\to\infty$时

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{N+1}a_nz^{-n},$$

则

$$\int_{z}^{\infty}\left[f(\zeta)-a_0-\frac{a_1}{\zeta}\right]d\zeta\sim\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_{n+1}}{n}z^{-n},$$

其中积分是沿着幅角介于α与β之间的并且幅角为常数的直线进行的。

证明

$$f(\zeta)-a_0-a_1\zeta^{-1}=a_2\zeta^{-2}+a_3\zeta^{-3}+\cdots+a_N\zeta^{-N}+g(\zeta),$$

其中，当 $\zeta\to\infty$ 时 $g(\zeta)=O[\zeta^{-(N+1)}]$，则

$$\int_z^\infty[f(\zeta)-a_0-a_1\zeta^{-1}]d\zeta=\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{2z^2}+\cdots+\frac{a_N}{(N-1)z^{N-1}}+\int_z^\infty g(\zeta)d\zeta.$$

对于 $|\zeta|$ 充分大，$|g(\zeta)|\leqslant K|\zeta|^{-(N+1)}$，并且

$$\left|\int_z^\infty g(\zeta)d\zeta\right|\leqslant K\int_{|z|}^\infty r^{-(N+1)}dr=\frac{K}{N}|z|^{-N}.$$

所以

$$\int_z^\infty[f(\zeta)-a_0-a_1\zeta^{-1}]d\zeta=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_{n+1}}{n}z^{-n}+o(z^{-(N-1)}),$$

这就证明了定理。

推论 10.2.5. 设对于 $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$，当 $z\to\infty$ 时

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^\infty a_nz^{-n},$$

则

$$\int_z^\infty[f(\zeta)-a_0-a_1\zeta^{-1}]d\zeta\sim\sum_{n=1}^\infty\frac{a_{n+1}}{n}z^{-n},$$

其中积分路线是沿着幅角为常数且介于 α，β 之间的一条直线进行的。

定理 10.2.6. 设在 R 中当 $z\to z_0$ 时 $f(z)\sim\sum_{n=0}^N a_n(z-z_0)^n$，设在 R 中 $f'(z)$ 存在，且当 $z\to z_0$ 时 $f'(z)\sim\sum_{n=0}^N b_n(z-z_0)^n$，设 R 满足定理 10.2.4 中（关于渐近幂级数逐项积分）的条件，则 $b_0=a_1$，$b_1=2a_2$，$b_2=3a_3$，$\cdots b_{N-1}=Na_N$.

证明 对于 $f'(z)$，逐项积分级数，则有

$$f(z)-\lim_{z\to z_0}f(z)=\int_{z_0}^{z}f'(\zeta)d\zeta\sim\sum_{n=1}^{N}\frac{b_{n-1}}{n}(z-z_0)^n,$$

并由 $f(z)$ 的渐近幂级数的唯一性，还有

$$a_0=\lim_{z\to z_0}f(z),\ b_0=a_1,\ b_1=2a_2,$$

$$b_2=3a_3,\cdots,b_{N-1}=Na_N.$$

推论 10.2.6. 设在 R 中，当 $z\to z_0$ 时 $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，设在 R 中 $f'(z)$ 存在，且 $f'(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$。设 R 满足定理 10.2.4 中（关于渐近幂级数的逐项积）的条件，则 $b_0=a_1$，$b_1=2a_2$，$b_2=3a_3,\cdots$。

推论 10.2.7. 对于 $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$，当 $z\to\infty$ 时设

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{-n},$$

并设 $f'(z)$ 在上述域中存在，且当 $z\to\infty$ 时

$$f'(z)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^{-(n+1)},$$

则

$$a_n=b_n,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

对于解析函数，我们可作出比上面的推论更确定的叙述。

定理 10.2.8. 设 $f(z)$ 在 $R=\{z|\ |z|>r,\ \alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta\}$ 中解析。设在 R 中当 $z\to\infty$ 时

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}.$$

则在 $R'=\{z\mid |z|>r,\ \alpha<\alpha_1\leqslant\arg z\leqslant\beta_1<\beta\}$ 中当 $z\to\infty$ 时

$$f'(z)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{-(n+1)}.$$

证明 对于一个固定的 N 考虑 $g(z)=f(z)-a_0-a_1z^{-1}-\cdots-a_Nz^{-N}$，这个函数在 R 中解析，并当 $z\to\infty$ 时为 $O(z^{-(N+1)})$。

因此存在一个 $r^* \geqslant r$ 使得 $|g(z)| \leqslant M|z|^{-(N+1)}$ 对 $|z| > r^*$ 成立，参看图 10.2.1.

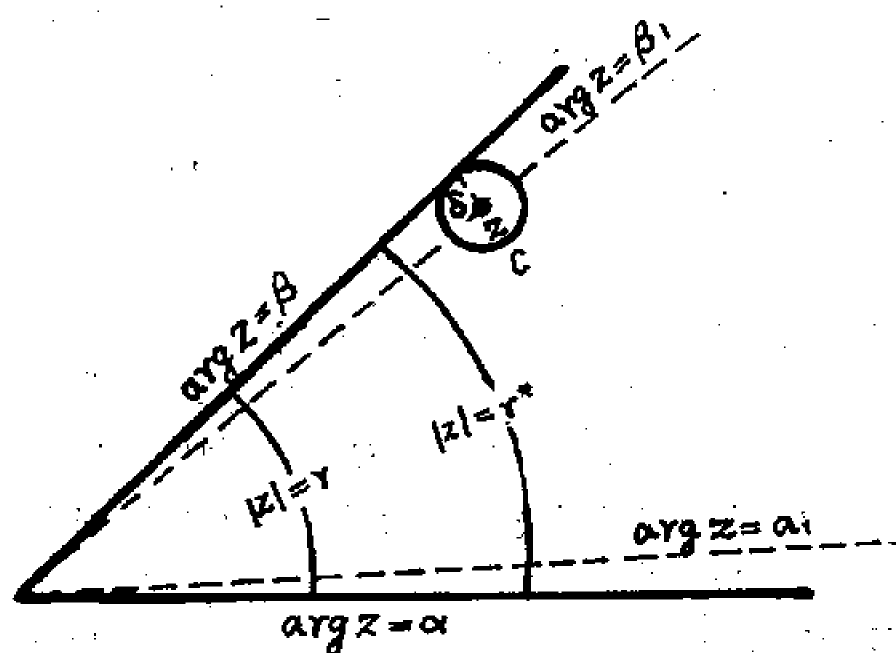


图 10.2.1.

在 R' 中挑选一个 z，其模充分大使得它到 R 的边界的最小距离就是它到直线 $\arg z=\alpha$ 或 $\arg z=\beta$ 的垂直距离。设这个距离为 δ。注意 δ 与 $|z|$ 成比例，并且当 $|z|\to\infty$ 时 $\delta\to\infty$。设 $\delta=k|z|$，取 z 为园心、δ 为半径作园 C，现在

$$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{(z-\zeta)^2}d\zeta,$$

$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{\delta(|z|-\delta)^{N+1}}=\frac{M}{k|z|^{N+2}(1-k)^{N+1}},$$

$$\lim_{|z|\to\infty}|z|^{N+1}|g'(z)|=0.$$

这就证明了 $g'(z)=o(z^{-(N+1)})$. 又由于

$$g'(z)=f'(z)+a_1z^{-2}+2a_2z^{-3}+\cdots+Nc_Nz^{-(N+1)},$$

这就证明了定理。

习　题 10.2

设在R中当 $z \to z_0$ 时 $f(z) \sim g(z)$，问由此能否导出

$[f(z)]^n \sim [g(z)]^n$，$e^{f(z)} \sim e^{g(z)}$，及 $\log f(z) \sim \log g(z)$？试解释之。

10.3 积分的渐近展开式

正如我们在第七章所指出过的，某些特殊函数都有积分表示式。如果这函数是一个微分方程的解，我们可以用它的 Laplace 变换（第九章）或它的 Fourier 变换（第八章）表作一个积分。因此，求一个积分的渐近展开式的问题在解析函数的理论中起了重要的作用。

在第 10.1 节的例中，我们用两种方法得到一个积分的渐近展开式。这就是把被积函数的一部分展开作级数，然后再逐项积分。或者，重复利用分部积分法。在本节中，我们推广这些方法使之适用于更大一类的函数。

现设有一形如$\int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt$的积分，它是一个 Laplace 变换。其次，假设$F(t) = f(t^a) t^b$，其中$a>0$，$b>-1$，若$f(x)$在 $|x|<\delta$ 中有一 Maclaurin 展开式，则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

且

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{na+b}.$$

如果我们形式的把这级数代入积分中并逐项积分，则可得到级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(na+b+1)}{z^{na+b+1}}.$$

这个方法，一般说来并不是总有效的。这是因为所得的级数常常是发散的。然而，我们可以证明，在相当一般的情形下，所得的级数就是积分的一个渐近展开式。下面是 Watson 引理。

定理 10.3.1. 设 $F(t)=f(t^a)t^b$，$a>0$，$b>-1$. 并设 $f(x)$ 在 $|x|<\delta$ 时有一个 Maclaurin 展开式，设当 $t\to\infty$ 时 $|F(t)|\leqslant Me^{ct}$ 对某些常数 M 及 c 成立。并设 $f(x)$ 对一切 x 值都是连续的，则对于 $|\arg z|<\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$，当 $z\to\infty$ 时有

$$\int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt\sim\sum_{n=0}^\infty\frac{a_n\Gamma(na+b+1)}{z^{na+b+1}},$$

其中
$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

证明 这些已给条件保证了积分 $\int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$ 当 $R(z)>c$ 时是存在的。现在，对于固定的 N，有

$$\left|F(t)-\sum_{n=0}^N a_n t^{na+b}\right|\leqslant Kt^{(N+1)a+b}e^{ct},$$

其中 K 为某个常数。因此，如果 $G(z)=\int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$，则

$$\begin{aligned}G(z)&=\sum_{n=0}^N\int_0^\infty a_nt^{na+b}e^{-zt}dt+R_N\\&=\sum_{n=0}^N a_n\Gamma(na+b+1)z^{-(na+b+1)}+R_N,\end{aligned}$$

并且当 $\operatorname{Re}(z)>c$ 时

$$\begin{aligned}|R_N|&\leqslant\int_0^\infty Kt^{(N+1)a+b}e^{(c-x)t}dt\\&=\frac{K\Gamma[(N+1)a+b+1]}{(x-c)^{(N+1)a+b+1}},\end{aligned}$$

若 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，则 $x>|z|\sin\alpha$，且若 $|z|>c/\cos\alpha$，则 $x-c>0$. 因此当 $|z|\to\infty$ 时有

$$|z^{Na+b+1}R_N| \leqslant \frac{K\Gamma[(N+1)a+b+1]\,|z|^{Na+b+1}}{(|z|\sin\alpha - c)^{(N+1)a+b+1}} \to 0.$$

由于这些结果对$N=0,1,2,\cdots$成立，这就证明了定理。

例 10.3.1. 试求对于 $|\arg z| \leqslant \pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$，且当 $z\to\infty$时 Gamma 函数（γ—函数）$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$的渐近展开式。

现设 $z=x>0$，并设 $t=sx$，则

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

$$=x^x e^{-x}\int_0^\infty (se^{1-s})^x ds.$$

公式

$$\Gamma(z)=z^z e^{-z}\int_0^\infty (se^{1-s})^z ds$$

对 $\mathrm{Re}(z)>0$ 成立。这是因为等式两端在这个域中都是解析的，并且它们在正实半轴是相等的，我们将在上面的表示式中，应用 Watson 引理去求积分的渐近展开式。首先，我们注意函数

$$\eta(s)=se^{1-s}$$

在 $s=1$ 处有一极大值，并且在区间 $0\leqslant s\leqslant 1$ 及 $1\leqslant s<\infty$ 内都是单调的，见图 10.3.1.

对于 $\eta=e^{-u}$ 的一个已给值，方程

$$e^{-u}=se^{1-s},$$

或

$$u=s-1-\ln s,$$

有两个解。设这两个解是 $s(u)$ 和 $\sigma(u)$，其中 $0\leqslant s(u)\leqslant 1$ 及 $1\leqslant\sigma(u)<\infty$。所以

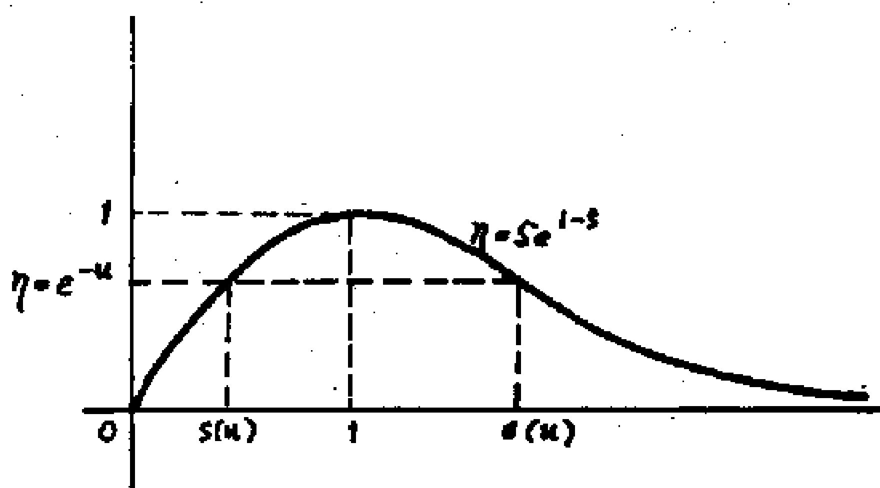


图 10.3.1.

$$\int_0^\infty (se^{1-s})^z ds=\int_0^1 (se^{1-s})^z ds+\int_1^\infty (\sigma e^{1-\sigma})^z d\sigma$$

$$=\int_\infty^0 e^{-uz}\frac{ds}{du}du+\int_0^\infty e^{-uz}\frac{d\sigma}{du}du$$

$$=\int_0^\infty e^{-uz}\left(\frac{d\sigma}{du}-\frac{ds}{du}\right)du.$$

由简单的计算可证

$$\frac{d\sigma}{du}-\frac{ds}{du}=\frac{\sigma}{\sigma-1}+\frac{s}{1-s}=\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{1-s},$$

并且由于当$u\neq0$时有$\sigma\neq1$及$s\neq1$，可得当$u\geqslant\epsilon>0$时$\dfrac{d\sigma}{du}-\dfrac{ds}{du}$是有界的。剩下来只要证明

$$\frac{d\sigma}{du}-\frac{ds}{du}=f(u^a)u^b,$$

其中$f(v)$对于较小的$|v|$有一个Maclaurin展开式。考虑隐式关系$(1/2)\zeta^2=\omega-\log(1+\omega)$．考虑这关系的理由是，如果在$u=s-1-\ln s$中，我们令$2u=\zeta^2$，$s-1=\omega$，便得$\zeta$与$\omega$

之间的关系式。现在 $\omega-\log(1+\omega)$ 在 $\omega=0$ 处是解析的；事实上，对于 $|\omega|<1$，

$$\frac{1}{2}\zeta^2=\omega-\log(1+\omega)=\frac{\omega^2}{2}-\frac{\omega^3}{3}+\frac{\omega^4}{4}-\cdots$$

$$\zeta=\pm\omega\left(1-\frac{2}{3}\omega+\frac{2}{4}\omega^2-\cdots\right)^{\frac{1}{2}},$$

我们看到 ζ 在 $\omega=0$ 的邻域里有两个分枝。因此，由定理 5.3.3，方程

$$\zeta=\omega\left(1-\frac{2}{3}\omega+\frac{2}{4}\omega^2-\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$$

有唯一的解：

$$\omega(\zeta)=\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\cdots.$$

其中 kb_k 是 ζ^{-k} 在 $\omega=0$ 处的留数。易于算出 $b_2=1/3$，$b_3=1/36$，$b_4=-1/270$ 等等。另一分枝是 $\omega_2(\zeta)=\omega_1(-\zeta)$。置 $\omega_1=\sigma-1$，$\omega_2=s-1$，$\zeta^2=2u$，对充分小的 $|u|$，我们有：

$$\sigma=1+(2u)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(2u)+\frac{1}{36}(2u)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{270}(2u)^2+\cdots,$$

$$s=1-(2u)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(2u)-\frac{1}{36}(2u)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{270}(2u)^2+\cdots,$$

$$\frac{d\sigma}{du}-\frac{ds}{du}=\sqrt{2}\,u^{-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{6}u^{\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$=u^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}u+\cdots\right),$$

把最后的表达式代入积分中并形式的逐项积分，由 Watson 引理

$$\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12z}+\cdots\right),\quad(z\to\infty)$$

在 $|\arg z|<\pi/2-\alpha, 0<\alpha<\pi/2$ 中成立。可以证明，这个渐近式对于 $|\arg z|\leqslant\pi-\alpha, 0<\alpha<\pi$ 确实成立 (见习题 10.3.1)

其次，我们再用分部积分法研究渐近展开式。考虑积分

$$\int_0^\infty g(t)e^{zh(t)}dt.$$

形式的进行运算，我们有

$$\int_0^\infty g(t)e^{zh(t)}dt=\int_0^\infty zh'(t)e^{zh(t)}\left[\frac{g(t)}{zh'(t)}\right]dt$$

$$=\frac{g(t)}{zh'(t)}e^{zh(t)}\Big|_0^\infty-\frac{1}{z}\int_0^\infty\frac{d}{dt}\frac{g(t)}{h'(t)}e^{zh(t)}dt$$

$$=-\frac{g(0)}{zh'(0)}e^{zh(0)}-\frac{1}{z}\int_0^\infty f(t)e^{zh(t)}dt,$$

这里，假设了 $\mathrm{Re}(z)>0$ 及 $t\to\infty$ 时 $h(t)\to-\infty$. 我们看到右端所得的积分是我们先前所考虑的类型。因此，我们又有重复上述方法的机会。一开始，我们证明，在关于 $h(t)$ 与 $g(t)$ 的某些假设下，在我们的公式中的第一项就是积分当 $z\to\infty$ 时的渐近展开式。

定理 10.3.2. 设 $g(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上是有界的连续的。并且 $g(0)\neq0$. 又设在 $0\leqslant t<\infty$ 上 $h(t)$ 是实函数并且连续。设 $h'(0)$ 存在并且 $h'(0)<0$. 又设对一切正的 t 值 $h(t)<h(0)$，以及 $t\to\infty$ 时 $h(t)\to-\infty$. 设 $\int_0^\infty e^{zh(t)}dt$ 对于 $\mathrm{Re}(z)>0$ 存在。则当 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$, $0<\alpha<\pi/2$ 且当 $z\to\infty$ 时

$$\int_0^\infty g(t)e^{zh(t)}dt\sim-\frac{g(0)}{zh'(0)}e^{zh(0)}$$

成立。

证明 首先证明我们只须考虑 $g(t)\equiv1$ 的情形。这是因为，如果

$$\int_0^\infty e^{zh(t)}dt \sim -\frac{e^{zh(0)}}{zh'(0)},$$

则可写出：

$$\int_0^\infty g(t)\,e^{zh(t)}dt = \int_0^\infty g(0)\,e^{zh(t)}dt + \int_0^\infty (g(t)-g(0))\,e^{zh(t)}dt.$$

由于 $g(t)$ 为連续，对于所给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $t<\delta$ 时有

$$|g(t)-g(0)|<\varepsilon,$$

并且

$$\left|\int_0^\infty [g(t)-g(0)]\,e^{zh(t)}dt\right| \leqslant \int_0^\infty |g(t)-g(0)|\,e^{zh(t)}dt \leqslant \varepsilon\int_0^\delta e^{zh(t)}dt + 2M\int_\delta^\infty e^{zh(t)}dt,$$

这里 $|g(t)-g(0)|\leqslant|g(t)|+|g(0)|\leqslant 2M$，$0\leqslant t<\infty$. 现在

$$\int_\delta^\infty e^{zh(t)}dt = \int_\delta^\infty e^{(z-1)h(t)}e^{h(t)}dt \leqslant e^{-\eta(z-1)}\int_0^\infty e^{h(t)}dt,$$

这是因为对于 $t\geqslant\delta$，存在某正数 $\eta>0$，使得 $h<-\eta$. 因此，由于 ε 是任意的，并且当 $x\to\infty$ 时 $e^{-\eta(z-1)}\to 0$，则 $\int_0^\infty g(t)\,e^{zh(t)}dt$ 及 $\int_0^\infty g(0)\,e^{zh(t)}dt$ 有相同的渐近公式。如果 $\delta>0$，我们证明 $\int_0^\infty e^{zh(t)}dt$ 与 $\int_\delta^0 e^{zh(t)}dt$ 有相同的渐近公式。现在

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{h(t)-h(0)}{t} = h'(0).$$

所以，对于任意的 $\varepsilon>0$ 则有 $\delta(\varepsilon)$ 使得 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时

$$|h(t)-h(0)-th'(0)|<\varepsilon t.$$

因此

$$\int_0^{\delta} e^{z[h(0)+th'(0)-\varepsilon t]}\,dt<\int_0^{\delta} e^{zh(t)}\,dt$$

$$<\int_0^{\delta} e^{z[h(0)+th'(0)+\varepsilon t]}\,dt.$$

所有这三个积分都与从 0 到∞的对应的积分差一项 $O(e^{-\beta z})$，$\beta>0$. 其次，对 $\mathrm{Re}(z)>0$，有

$$\int_0^{\infty} e^{z[h(0)+th'(0)-\varepsilon t]}\,dt=\frac{-e^{zh(0)}}{z[h'(0)-\varepsilon]}.$$

$$\int_0^{\infty} e^{z[h(0)+th'(0)+\varepsilon t]}\,dt=\frac{-e^{zh(0)}}{z[h'(0)+\varepsilon]}.$$

因为 ε 是任意的，故知对 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$，及 $z\to\infty$，

$$\int_0^{\infty} e^{zh(t)}\,dt\sim\frac{-e^{zh(0)}}{zh'(0)}$$

成立。

例 10.3.2. 对于 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$，及 $z\to\infty$，求误差函数 $E(z)=\int_z^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ 的渐近展开式。

事实上，设 $z=x>0$，那末，令 $u=t-x$，

$$E(x)=\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt=e^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}e^{-2ux}\,du.$$

这就导出当$\mathrm{Re}(z)>0$时$E(z)=e^{-z^2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}e^{-2uz}\,du$，这是因为在这域中方程的两边都是解析的并且在实轴上相等。现在积分$\int_0^{\infty} e^{-u^2}e^{-2uz}\,du$ 满足定理 10.3.2 中的假设，并重复应用这个定理，我们得到对于 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$及 $z\to\infty$，有

$$E(z) \sim e^{-z^2}\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3 z^3} - \cdots\right)$$

成立。

如果对某一类积分，$h'(0)=0$，而定理10.3.2的其余条件均满足，则上述方法应作修改。因此，我们要把它推广到 $h'(0)=0$ 的情形。

定理 10.3.3. 设在 $0 \leqslant t < \infty$ 上 $g(t)$ 是有界的、連续的，并且 $g(0) \neq 0$，设 $h(t)$ 在 $0 \leqslant t < \infty$ 上是实函数，并且是連续的。且对一切 $t > 0$ 有 $h(t) < h(0)$，设对某些正数 δ，使得当 $0 \leqslant t < \delta$ 时 $h'(t)$ 存在，且 $h'(0)=0$。又设 $h''(0) < 0$，并设对 $\mathrm{Re}(z) > 0$，$\int_0^\infty e^{zh(t)}dt$ 存在，则对 $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$，$0 < \alpha < \pi/2$ 及 $z \to \infty$ 时

$$\int_0^\infty g(t)\, e^{zh(t)}\, dt \sim g(0)\sqrt{\frac{\pi}{-2zh'(0)}}\, e^{zh(0)}.$$

证明 如同在定理10.3.2中所证明的那样，我们只须考虑 $\int_0^\infty e^{zh(t)}dt$ 的渐近公式。由实变量 t 的函数的广义中值定理，对于 $\varepsilon > 0$，则有

$$\left| h(t) - h(0) - \frac{1}{2}h''(0)t^2 \right| \leqslant \varepsilon t^2.$$

对某个 $\delta > 0$ 及 $t \leqslant \delta$ 成立。如前一定理一样，我们只须考虑区间 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 的情况。在这里

$$\int_0^\delta e^{z[h(0)+(1/2)t^2 h'(0) - \varepsilon t^2]} dt < \int_0^\delta e^{zh(t)} dt$$
$$< \int_0^\delta e^{z[h(0)+(1/2)t^2 h'(0) + \varepsilon t^2]} dt.$$

现在，所有这三个积分与它们所对应的由0到∞的积分有相同的渐近展开式。众所周知，

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

所以，如果 $z\neq 0$，$\mathrm{Re}(z)>0$，且$\sqrt{z}$的支割线位于左半平面，则有

$$\int_0^{\infty} e^{z[h(0)+(1/2)t^2h''(0)-\varepsilon t^2]}dt = e^{zh(0)}\sqrt{\frac{\pi}{-2z[h''(0)+\varepsilon]}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{z[h(0)+(1/2)t^2h''(0)+\varepsilon t^2]}dt = e^{zh(0)}\sqrt{\frac{\pi}{-2z[h''(0)-\varepsilon]}}.$$

由于 ε 是任意的，故知在 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$，且当 $z\to\infty$ 时

$$\int_0^{\infty} e^{zh(t)}dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{-2zh''(0)}}\, e^{zh(0)}$$

成立，这就证明了定理。

上面最后的定理是某种类型积分的渐近展开方法的基础。这个方法是所谓的最速下降法。现设有一如下形式的积分：

$$\int_C g(\zeta)\, e^{zh(\zeta)}\, d\zeta,$$

其中积分是沿着 ζ 平面上的某个围道进行的，并且 $g(\zeta)$ 与 $h(\zeta)$ 在这平面上为解析。如果已知积分对于 $\mathrm{Re}(z)>0$ 是存在的，并且积分的值在某种限制下与积分路线C的变动无关，那末，这个方法是把这积分的路线变作新的积分线路，以便可以应用定理10.3.3．考虑方程

$$\sigma = F(\xi,\eta) = \mathrm{Re}[h(\zeta)].$$

它表示三維空间（ξ，η，σ）内某一类曲面。因为在 $h(\zeta)$ 的解析域中，σ 是域中的调和函数。因而 σ 在这样的域中不可能有一个眞正的极大値或极小値。但是 $\sigma(\xi,\eta)$ 可能有一个鞍点，在该点 $\sigma_{\xi}=\sigma_{\eta}=0$．在这样的一个点处 $h'(\zeta)=\sigma_{\xi}-i\sigma_{\eta}=0$．在鞍点处的最速下降曲线及最速上升曲线都与等高线 $\sigma=C$ 是

垂直的。所以，在最速下降曲线及最速上升曲线上$\operatorname{Im}[h(\zeta)]$都是常数。在最速上升曲线上 $\operatorname{Re}[h(\zeta)]$ 是递增的，因而它是正的*。但我们已假设对于 $\operatorname{Re}(z)>0$ 时积分是存在的。所以积分的围道就不可能取最速上升曲线。总之，我们应寻求如下一条积分路线：它过 $h'(\zeta)$ 的零点ζ_0，且在这路线上$\operatorname{Im}[h(\zeta)]$应取常量。现设 ζ_0 位于这线路的端点处（若不然，我们可以把结果表为具有这种性质的积分之和）。那末，在靠近端点的点处 $h(\zeta)=h(\zeta_0)-t$，其中 t 是实的正数，并且当由点 ζ_0 处离开时为递增，于是这就引导我们考虑如下形状的积分：

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} g(\zeta(t))\frac{d\zeta}{dt}dt.$$

我们用下面的例子来说明这个方法。

例 10.3.3. 试求 Airy 函数 $A(z)$ 的渐近展开式，其中 $A(z)$ 为 Airy 微分方程 $w''-zw=0$ 的一个特解。

为此，我们希望求如下形式的解：

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta} W(\zeta)\,d\zeta,$$

其中C是ζ平面内待定的围道。求这种解的动机是，因为这是解的逆 Laplace 变换的一般形式。现在

$$w''=\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^2 e^{z\zeta} W(\zeta)\,d\zeta,$$

$$zw=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} z e^{z\zeta} W(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{e^{z\zeta}W(\zeta)}{2\pi i}\bigg|_a^b-\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta}\frac{dW}{d\zeta}d\zeta,$$

这里a，b是积分线路的端点。现在假设选取积分路线而使得

---

* 不失一般性，可假设 $h(\zeta_0)=0$，其中 ζ_0 是鞍点。

$$\left.\frac{e^{z\zeta}W(\zeta)}{2\pi i}\right|_a^b=0.$$

所以W满足

$$\frac{dW}{d\zeta}+\zeta^2W=0,$$

而这方程有解$W(\zeta)=e^{-\zeta^3/3}$。因此

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta}e^{-\zeta^3/3}d\zeta,$$

其中积分线路必须这样的选取，而使得在C的端点处$e^{z\zeta}e^{-\zeta^3/3}\to0$.由于这个原因，我们挑选的线路应该能渐近地趋于直线$\arg\zeta^3=0$，$2\pi,4\pi$ 或 $\arg\zeta=0,2\pi/3,4\pi/3$。图10.3.2中已给一条特殊的路线。我们定义$A(z)$为$w''-zw=0$的一个解：

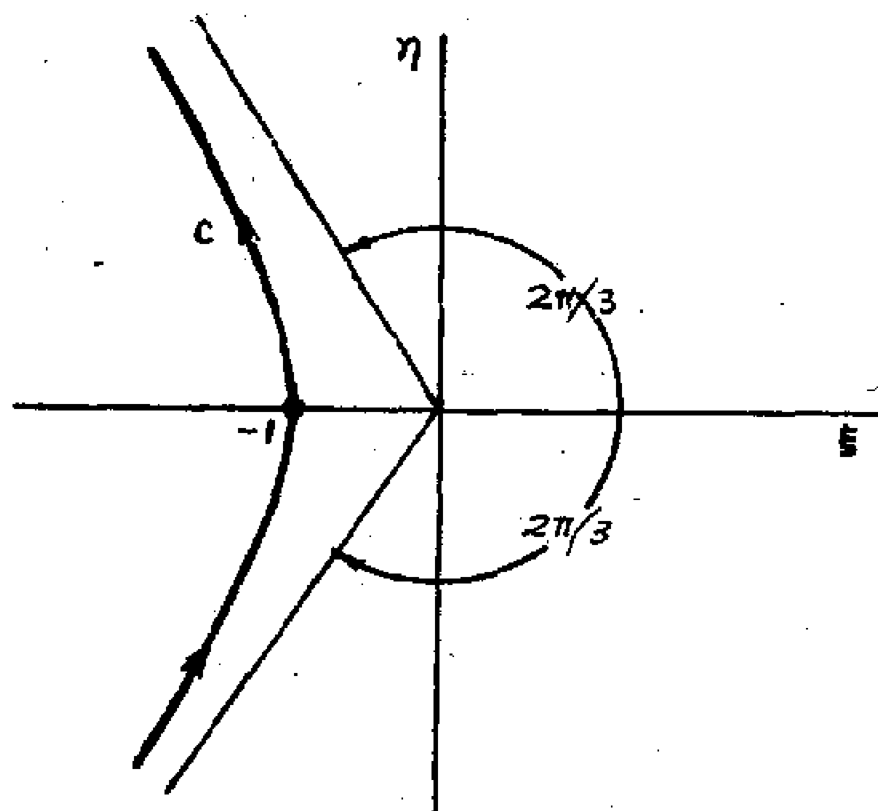


图 10.3.2.

$$A(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\zeta}e^{-\zeta^3/3}d\xi;$$

这里，我们要选取最速下降曲线，以便能得到 $A(z)$ 的渐近展开式。首先作变量替换$\zeta=z^{\frac{1}{2}}u$. 则

$$A(z)=\frac{\sqrt{z}}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z^{\frac{3}{2}}(u-u^3/3)}du,$$

且Γ是在u平面内的最速下降路线。置$h(u)=u-u^3/3$. 则 $h'(u)=1-u^2=0$ 在$u=\pm1$处成立。我们选取-1作为鞍点。在$u=-1$处，$h(-1)=-1+(1/3)$ 为实数。因此，我们应选取积分线路使过-1，并且$\mathrm{Im}[h(u)]=0$. 若 $u=\xi+i\eta$,

$$h(u)=\xi-\frac{\xi^3}{3}+\xi\eta^2+i\left(\eta-\xi^2\eta+\frac{\eta^3}{3}\right),$$

$$\mathrm{Im}[h(u)]=\frac{\eta}{3}(3-3\xi^2+\eta^2)=0.$$

曲线 $\eta=0$ 是实轴，它不趋于渐近线 $\arg u=\pm2\pi/3$. 曲线 $\eta^2-3\xi^2-3=0$ 却趋于渐近线，所以我们采用它作为积分线路。现在可引入变量

$$t=h(-1)-\mathrm{Re}[h(u)],$$

其中u在Γ上，那末

$$A(z)=\frac{\sqrt{z}}{2\pi i}e^{-(2/3)z^{\frac{3}{2}}}\left[\int_0^\infty e^{-tz^{\frac{3}{2}}}\frac{du_1}{dt}dt\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty e^{-tz^{\frac{3}{2}}}\frac{du_2}{dt}dt\right],$$

这里 u_1 与 u_2 分别对应于Γ的上半枝与下半枝。事实上，在这情况下，我们可把问题转化为 Watson 引理的一个应用，并得

出整个的展开式。令

$$v=h(-1)-h(u)=-(2/3)-u+u^3/3$$
$$=(u+1)^2[-1+(u+1)/3],\ \text{则}$$
$$\pm v^{\frac{1}{2}}=(u+1)[-1+(u+1)/3]^{\frac{1}{2}}.$$

由定理 5.3.3，$u+1$有 以 $\pm v^{\frac{1}{2}}$为变量的幂级数，即

$$u+1=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\pm v^{\frac{1}{2}})^n,$$

其中 nb_n 是 $(u+1)^{-n}[-1+(u+1)/3]^{-\frac{n}{2}}$在 $u=-1$ 处的留数。因此

$$b_n=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[-1+(u+1)/3]^{-\frac{n}{2}}\right\}_{u=-1}.$$

由此可得 $b_1=-i$，$b_2=-1/6$，$b_3=5i/72$，等等。

$$u_1+1=it^{\frac{1}{2}}-(1/6)t-(5i/72)t^{\frac{3}{2}}+\cdots$$
$$u_2+1=-it^{\frac{1}{2}}-(1/6)t+(5i/72)t^{\frac{3}{2}}+\cdots$$
$$\frac{du_1}{dt}-\frac{du_2}{dt}=it^{-\frac{1}{2}}-\frac{5i}{48}t^{\frac{1}{2}}+\cdots,$$

$$A(z)\sim\frac{\sqrt{z}}{2\pi}e^{-(2/3)z^{3/2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{z^{3/4}}-\frac{5}{24}\ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{z^{9/4}}+\cdots\right)$$
$$\sim\frac{e^{-(2/3)z^{2/3}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}\left(1-\frac{5}{48}\ \frac{1}{z^{3/2}}+\cdots\right).$$

展开式在扇形域 $|\arg z^{\frac{3}{2}}|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$ 或 $|\arg z|\leqslant\pi/3-\beta$，$0<\beta<\pi/3$ 中是有效的。

到现在为止，我们使用分部积分法这一技巧时，只限于积分的上限为∞的情形。现在考虑 a 与 b 都是有限的情形如下，其中 $a<b$：

$$\int_a^b g(t)\,e^{zh(t)}dt=\frac{g(t)}{zh'(t)}e^{zh(t)}\Big|_a^b-\frac{1}{z}\int_a^b e^{zh(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{g(t)}{h'(t)}\right]dt$$

$$=\frac{g(b)}{zh'(b)}e^{zh(b)}-\frac{g(a)}{zh'(a)}e^{zh(a)}$$

$$-\frac{1}{z}\int_a^b e^{zh(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{g(t)}{h'(t)}\right]dt.$$

假设 $h(b)<h(a)$，$h'(b)\neq0$，$h'(a)\neq0$，因而，在 $|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$ 及 $z\to\infty$ 时

$$\int_a^b g(t)\,e^{zh(t)}dt\sim\frac{g(b)}{zh'(b)}e^{zh(b)}-\frac{g(a)\,e^{zh(a)}}{zh'(a)}$$

成立。

于是在 $\mathrm{Re}(z)>0$，且当 $z\to\infty$ 时，

$$\int_a^b g(t)\,e^{zh(t)}dt\sim-\frac{g(a)\,e^{zh(a)}}{zh'(a)},$$

这是因为在 $\mathrm{Re}(z)>0$，$z\to\infty$ 时，有

$$\frac{e^{zh(b)}}{e^{zh(a)}}=e^{z[h(b)-h(a)]}\to0$$

成立之故。

相似的情形也出现于当我们希望得到 $x\to\infty$ 时积分 $\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt$ 的渐近公式之时，这里 x 是实数。我们将假设 $g(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 中連续，并且 $h(t)$ 是实函数且两次可微分。我们还将假设 $h'(a)=0$，但在整个区间内处处有 $h'(t)\neq0$. 这种求出所需要的渐近公式的方法是所谓“稳定相位法”(method of stationary phase)．此法的要点在于证明对于很大的 x 值的影响是直接来自 $t=a$ 的一个邻域内。这方法的合理性是因为当 $h(t)$ 正在变化且 x 很大的地方，$e^{ixh(t)}$ 迅速地振盪，并且在积分中正的及负的振幅趋向于互相消去。另一方

面，在 $h(t)$ 为稳定的地方，即 $h'(t)=0$成立之处，$e^{ixh(t)}$不振遢，因而这里感到最大的影响．下面让我们说得更精确些。

已给 $\varepsilon>0$，在此存在 $\delta>0$ 使得

$$\left| h(t)-h(a)-\frac{1}{2}h''(a)(t-a)^2 \right| \leqslant \varepsilon(t-a)^2,$$

其中 $t-a\leqslant\delta$，则

$$\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt=\int_a^{a+\delta} g(t)e^{ixh(t)}dt+\int_{a+\delta}^b g(t)e^{ixh(t)}dt.$$

在这区间 $a+\delta\leqslant t\leqslant b$，$h'(t)\neq 0$．所以由定理 8.8.1 的结果，有

$$\int_{a+\delta}^b g(t)e^{ixh(t)}dt=\int_{h(a+\delta)}^{h(b)} g(t)e^{ixh}\frac{dt}{dh}dh$$

$$=\int_\alpha^\beta F(h)(\cos xh+i\sin xh)dh$$

$$=O(x^{-1}).$$

另一方面，在另一区间中令 $u=t-a$，

$$\int_a^{a+\delta} g(t)e^{ix[h(a)+(1/2)h''(a)(t-a)^2]}dt$$

$$=\int_0^\delta g(u+a)e^{ix[h(a)+(1/2)h''(a)u^2]}du.$$

现在，这最后的积分与

$$\int_0^\infty g(a)e^{ixh(a)}e^{(ix/2)h''(a)u^2}du$$

$$=\frac{g(a)e^{ixh(a)}}{\sqrt{\frac{1}{2}xh''(a)}}\int_0^\infty e^{iv^2}dv$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,g(a)e^{ixh(a)}}{\sqrt{2xh''(a)}}e^{i\pi/4}$$

有相同的渐近公式*。于是我们的渐近公式是：

$$\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(a)\,e^{ixh(a)}}{\sqrt{xh'(a)}}e^{i\pi/4}.$$

例 10.3.4. 求 n 阶第一类 Bessel 函数的渐近公式，其中 n 为整数。

由于在第 7.5 节，我们曾证明过下述公式

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\int_0^\pi e^{in\theta}e^{-ix\sin\theta}d\theta\right].$$

这里，$h(\theta)=-\sin\theta$，$h'(\theta)=-\cos\theta$，$h''(\theta)=\sin\theta$，而稳定相位点是 $\theta=\pi/2$，这时 $h(\pi/2)=-1$ 及 $h''(\pi/2)=1$。现在

$$\int_0^\pi e^{in\theta}e^{-ix\sin\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{in\theta}e^{-ix\sin\theta}d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{in\theta}e^{-ix\sin\theta}d\theta$$

$$\sim\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{in\pi/2}e^{-ix}}{\sqrt{x}}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

所以，当 $x\to\infty$ 时有

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

成立。

---

* 不失一般性，我们可设 $h''(a)>0$. 若不然，可考虑 $\int_a^b g(t)e^{-ixh(t)}dt$，并在公式中把 i 换作 $-i$.

习　题 10.3

1. 证明例 10.3.1 中的$\Gamma(z)$的渐近展开式对于$|\arg z|\leqslant\pi-\alpha$，$0<\alpha<\pi$ 也有效。

提示：证明如果 $|\beta|<\pi/2$ 及 $\mathrm{Re}(ze^{\beta i})>0$ 时

$$\Gamma(z)=z^z e^{-z}\int_0^\infty e^{-zt}F(t)\,dt$$
$$=z^z e^{-z}\int_0^\infty e^{-zte^{\beta i}}F(te^{\beta i})e^{\beta i}dt$$

成立，并求出最后这个积分的渐近展开式。

2. 试证 Stirling 公式 $n!\sim n^n\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}$.

3. 证明 $\Gamma(z)=z^z e^{-z}\int_0^\infty e^{z(1-t-\ln t)}dt$，　并由此求出$|\arg z|\leqslant\pi/2-\alpha$，$\alpha>0$，及 $z\to\infty$ 时的渐近公式

$$\Gamma(z)\sim z^z e^{-z}\sqrt{2\pi}/\sqrt{z}.$$

4. 试求$\int_0^\infty t^z e^{-zt}dt$ 渐近展开式。

5. Fresnel 积分为

$$C(x)=\int_0^x\cos t^2\,dt \text{ 及 } S(x)=\int_0^x\sin t^2\,dt,$$

所以
$$C(x)+iS(x)=\int_0^x e^{it^2}dt.$$

如果

$$C(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}-P(x)\cos x^2+Q(x)\sin x^2,$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}-P(x)\sin x^2-Q(x)\cos x^2,$$

证明

$$P(x)\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3x^7}+\cdots\right),$$

$$Q(x) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right).$$

6. 设 n 为整数而 y 为实数，证明当 $y\to\infty$ 时

$$J_n(iy) \sim \frac{i^n e^y}{\sqrt{2\pi y}}.$$

7. 证明当 $z\to\infty$，且 $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \alpha$，$0<\alpha<\pi/2$时

$$\int_z^\infty e^{-t} t^{-\nu} dt \sim e^{-z} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k z^{-\nu-k},$$

其中 $a_0=0$，且 $a_k=\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$。

10.4 常微分方程的渐近解

如象我们所曾经看到过的那样，数学物理中许多重要的函数都是作为微分方程的解而得到的。在许多应用中，重要地是求出这许多函数的渐近展开式。在上一节中，我们已经证明，在某些情况下，例如 Airy 方程、Bessel 方程，我们能够从它们的解的积分表达式中得到它们的渐近展开式。在本节中，我们将说明怎样直接从微分方程中求得它们的渐近解。

我们将考虑二阶线性微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0.$$

大多数的时间里，我们的兴趣将集中在 $z\to\infty$ 时渐近展开式。因此，我们将考虑微分方程靠近 $z=\infty$ 时的解。习题 7.3.1 的结果表明，如果 $2z - z^2p(z)$ 及 $z^4q(z)$ 均在∞处解析，那末∞是微分方程的一个普通点，此时有两个线性无关的解，它们都是 $1/z$ 的幂级数的形式，并且它们都在∞的一个邻域内收敛。这些级数就是渐近级数，它们提供了计算当 $|z|$ 的值很大时解的计算方法。习题 7.4.1 的结果表明，如果 $zp(z)$ 及 $z^2q(z)$ 在 $z=\infty$ 处解析，则∞是微分方程的一个正则奇异点，并且 Frobenius 方法一般给出如下形式的两个线性无关的解：

$$w_1 = z^{-\alpha_1}(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots),$$

$$w_2 = z^{-\alpha_2}(\gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \cdots),$$

这里 α_1 及 α_2 是特征方程的根，并且相差不是一个整数，如果 α_1 及 α_2 相差为一个整数，则一般解可能含有 $\log z$ 的项，以及 z 的可能的正幂。在无论那种情况下，解都是当 $z \to \infty$ 时的渐近展开式。剩下来应考虑在∞处的非正则奇异点。

习题 10.4.1 的结果表明我们可考虑简单的微分方程

$$w'' + q(z)w = 0.$$

如果当 $z \to \infty$ 时 $q(z) = O(z^{-2})$，则在∞处有一正则奇异点。如果当 $z \to \infty$ 时 $q(z) = O(z^{-1})$ 或 $q(z) = O(1)$，则在∞处有一非正则奇异点。我们将只考虑$q(z)$在∞为解析的情形。因此，假设

$$q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots$$

其中 q_0 与 q_1 不全为零。

例如 ν 阶的 Bessel 方程是

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \frac{z^2 - \nu^2}{z^2} w = 0.$$

经过变换 $u = \sqrt{z}\, w$，它变作

$$u'' + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4z^2}\right) u = 0.$$

所以，在∞处有一非正则奇异点。虽然这时

$$q = 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4z^2}$$

在∞处为解析。我们已经看到 Bessl 函数的某些渐近公式，它们都包含了形状为 $e^{\alpha z} z^{-\beta}$ 的项。因此，我们首先试一下如下形式的解*：

---

* 这些叫做"标准解"

$$w(z)=e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-\beta-k}.$$

形式的进行，则有

$$w'(z)=\alpha e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-\beta-k}-e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta+k)c_k z^{-\beta-k-1},$$

$$w''(z)=\alpha^2 e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-\beta-k}-2\alpha e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta+k)c_k z^{-\beta-k-1}$$

$$+e^{\alpha z}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta+k)(\beta+k+1)c_k z^{-\beta-k-2}.$$

代入方程 $w''+q(z)w=0$，则得

$$\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-\beta-k}-2\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(\beta+k)c_k z^{-\beta-k-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\beta+k)(\beta+k+1)c_k z^{-\beta-k-2}$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\infty}q_k z^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-\beta-k}\right)=0.$$

比较系数，则有

$$\alpha^2 c_k-2\alpha(\beta+k-1)c_{k-1}+(\beta+k-1)(\beta+k-2)c_{k-2}$$

$$+\sum_{j=0}^{k}q_j c_{k-j}=0,$$

其中$k=0,1,2,\cdots$。并且我们已定义$c_{-1}=c_{-2}=0$. 因为$c_0\neq0$,

$$\alpha^2+q_0=0,\quad -2\alpha\beta+q_1=0,$$

并且对于 $k=1,2,3,\cdots$有

$$2\alpha k c_k=(\beta+k)(\beta+k-1)c_{k-1}+\sum_{i=2}^{k+1}q_i c_{k+1-i}.$$

如果 $q_0\neq0$，则 $\alpha=\pm\sqrt{-q_0}$及 $\beta=\mp q_1/2\sqrt{-q_0}$，并且系数 $c_1,c_2,c_3,\cdots$可由其他方程递推的确定。在这情况下，可形式的确定了两个标准解。如果 $q_0=q_1=0$，则我们得到正则奇异点的情形，这时$\alpha=0$，而β必须满足特征方程$\beta(\beta+1)+q_2=0$.在这情况下，可依 Frobenius 方法进行。若 $q_0=0$ 及 $q_1\neq0$，则不

存在标准解。然而，在这情形下，可以通过作变量替换

$$\zeta=\sqrt{z}\,,\quad u(\zeta)=w(u)/\sqrt{\zeta}$$

而确定其付标准解*。

在标准解存在的情况下，它们只是在形式的意义下存在的，即可以确定必要的常数与系数。在一般情况下，级数是发散的。然而，我们可证，它们是微分方程的某些解的渐近展开式。

第一步是用变量替换 $w(z)=e^{\alpha z}z^{-\beta}u(z)$ 把微分方程变形。这里 α 与 β 是上面确定的常数。由此得到 $u(z)$ 满足的微分方程是：

$$u''+2\left(\alpha-\frac{\beta}{z}\right)u'+\left[\alpha^2-\frac{2\alpha\beta}{z}+\frac{\beta(\beta+1)}{z^2}+q(z)\right]u=0.$$

因为 $\alpha^2=-q_0$ 及 $2\alpha\beta=q_1$，我们可把上式写作：

$$u''+2\left(\alpha-\frac{\beta}{z}\right)u'+\frac{1}{z^2}Q(z)u=0,$$

其中 $Q(z)=z^2[q(z)-q_0-q_1z^{-1}]+\beta(\beta+1)$ 当 $z\to\infty$ 时是有界的。乘以 $e^{2\alpha z}z^{-2\beta}$，我们可得：

$$\frac{d}{dz}\left(e^{2\alpha z}z^{-2\beta}\frac{du}{dz}\right)+e^{2\alpha z}z^{-2\beta-2}Q(z)u=0.$$

积分之，得

$$\frac{du}{dz}+e^{-2\alpha z}z^{2\beta}\int_{z_1}^{z}e^{2\alpha\zeta}\zeta^{-2\beta-2}Q(\zeta)u(\zeta)d\zeta$$
$$=\gamma_1e^{-2\alpha z}z^{2\beta}.$$

再积分之，又得：

---

* 见习题 10.4.2.

$$u(z)=\gamma_2+\gamma_1\int_{z_1}^{z} e^{-2\alpha\zeta}\zeta^{2\beta}d\zeta$$

$$-\int_{z_1}^{z} K(z,\eta)Q(\eta)u(\eta)\eta^{-2}d\eta,$$

其中 $K(z,\eta)=-\int_{z_1}^{\eta} e^{2\alpha\eta}e^{-2\alpha\zeta}(\zeta/\eta)^{2\beta}d\zeta$. 我们已把微分方程的一般解是一个 Volcerra 积分方程的解表示出来*。可以证明积分方程的一个解也是微分方程的一个解。微分方程的特解可以由适当选择 γ_1,γ_2 及 z_1 而得到。在这一节中，我们将注意靠近∞处的解。因此，置$z_1=\infty$，并考虑方程

$$u(z)=\gamma_2-\gamma_1\int_{z}^{\infty} e^{-2\alpha\zeta}\zeta^{2\beta}d\zeta$$

$$+\int_{z}^{\infty} K(z,\eta)Q(\eta)u(\eta)\eta^{-2}d\eta.$$

现在，γ_2是一个常数，并且可以得到$\int_{z}^{\infty} e^{-2\alpha\zeta}\zeta^{2\beta}d\zeta$的渐近展开式（习题10.3.7）。所以，剩下来的是要寻找如下形状的方程

$$w(z)=1+\int_{z}^{\infty} K(z,\eta)Q(\eta)w(\eta)\eta^{-2}d\eta$$

的解的渐近展开式。这可以用逐次逼近法来做。我们将不讨论一般的情形●，而是利用 Bessel 方程来说明这个方法。

例 10.4.1. 试求 Bessel 方程

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

的解的渐近展开式。

---

* 这种利用 Volterra 积分方程形成解的观念，已在习题 7.2 中讨论通。它与我们在 7.8 节中导出边值问题的 Fredholm 方法中所作的相似。

● 参看 A. Erdelyi: Asymptotic Expansion, New York: Dover Publications Inc. 1956, pp 64—72.

首先作变量替换 $u=\sqrt{z}\,w$，则 u 满足

$$u''+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{2}}{z^2}\right)u=0.$$

在这情形下，$q=1-(\nu^2-1/4)/z^2$，所以 $q_0=1$ 及 $q_1=0$. 因此 $\alpha=\pm i$ 及 $\beta=0$. 形式解的递推关系是：

$$\pm 2ikc_k=k(k-1)c_{k-1}-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)c_{k-1},$$

$k=1,2,3,\cdots$.

再回到积分方程，如果再作变量 $u(z)=e^{\pm iz}v(z)$，则 v 满足

$$\frac{d}{dz}\left(e^{\pm 2iz}\frac{dv}{dz}\right)=\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{z^2}e^{\pm 2iz}v,$$

并且积分方程为：

$$v(z)=\gamma_2+\gamma_1 e^{\mp 2iz}+\frac{1}{2i}\int_z^\infty[1-e^{\pm 2i(\eta-z)}]\frac{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)}{\eta^2}v(\eta)\,d\eta.$$

特别，当我们取 $\gamma_1=0$，$\gamma_2=1$，并且 $\alpha=i$，则

$$v(z)=1+\int_z^\infty K(z,\ \eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}v(\eta)\,d\eta,$$

此外还要研究这方程的解的渐近性态，这里

$$K(z,\eta)=\frac{1}{2i}[1-e^{2i(\eta-z)}].$$

现在规定积分方程中的积分路线是沿着直线 $\arg\eta=\arg z$ 进行的。则 $\eta-z=(|\eta|-|z|)e^{i\theta}$，其中 θ 是常数，并且若设 $0<\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi-\alpha$，则

$$\left|\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)K(z,\eta)\right|\leqslant\frac{\left|\nu^2-\frac{1}{4}\right|}{2}\left[1+e^{-2(|\eta|-|z|)\sin\theta}\right]\leqslant M,$$

这里M是一个常数。置$v_0=1$，并开始用逐次逼近法，令

$$v_1(z)=1+\int_z^\infty K(z,\ \eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}d\eta.$$

则

$$|v_1(z)-v_0|=\left|\int_z^\infty K(z,\ \eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}d\eta\right|\leqslant\frac{M}{|z|}.$$

其次，令

$$v_2(z)=1+\int_z^\infty K(z,\eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}v_1(\eta)d\eta.$$

则

$$|v_2(z)-v_1(z)|=\left|\int_z^\infty K(z,\eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}(v_1-v_0)d\eta\right|$$

$$\leqslant\frac{M^2}{2!}\cdot\frac{1}{|z|^2}.$$

一般，我们令

$$v_n(z)=1+\int_z^\infty K(z,\eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}v_{n-1}(\eta)d\eta,$$

并由明显的归纳法知

$$|v_n(z)-v_{n-1}(z)|\leqslant\frac{M^n}{n!}\ \frac{1}{|z|^n}.$$

现在考虑级数$v_0+\sum_{n=1}^\infty[v_n(z)-v_{n-1}(z)]$。令$|z|>R$，则与常

数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^n}{n!R^n}$$

比较之，可得上述级数是一致收敛的。显然，级数的每一项都是一个解析函数。因此，如果

$$v(z)=v_0+\sum_{n=1}^{\infty}[v_n(z)-v_{n-1}(z)],$$

则 $v(z)$ 在扇形域 $0<\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi-\alpha$ 上是解析的。可证 $v(z)$ 是积分方程的一个解，这只要把它代入方程，并由一致收敛性，可以进行逐项积分，得

$$1+\int_z^{\infty}K(z,\eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}[v_n(\eta)-v_{n-1}(\eta)]\right\}d\eta$$

$$=1+v_1+\sum_{n=1}^{\infty}[v_{n+1}(z)-v_n]=v(z).$$

解的唯一性将在习题中证明。

现在，考虑

$$|v(z)-v_N(z)|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}[v_n(z)-v_{n-1}(z)]\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{M^n}{n!\,|z|^n}$$

$$=O\left(\frac{1}{|z|^{N+1}}\right).$$

这证明 $v(z)=v_N(z)+O(z^{-N-1})$。如果我们找到 $v_N(z)$ 的 N 项渐近展开式，则它就是 $v(z)$ 的到 N 项的渐近展开式。例如考虑

$$v_1(z)=1+\int_z^{\infty}K(z,\ \eta)\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}d\eta$$

$$=1+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2i}\int_z^{\infty}\frac{1-e^{2i(\eta-z)}}{\eta^2}d\eta$$

$$=1+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2i}\cdot\frac{1}{\eta^2}\left[\eta-\frac{e^{2i(\eta-z)}}{2i}\right]_z^{\infty}$$

$$+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{i}\int_z^{\infty}\frac{1}{\eta^3}\left[\eta-\frac{e^{2i(\eta-z)}}{2i}\right]d\eta$$

$$=1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2iz}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

因此，$v(z)\sim1-(\nu^2-1/4)/2iz$，$(|z|\to\infty)$。注意在形式解中 $\alpha=i$，$c_0=1$，$c_1=-(\nu^2-1/4)/2i$。故形式解给出它的渐近展开式的许多项。可证形式解就是微分方程的解的渐近展开式。如果我们取其他的情形 $\alpha=-i$，我们将得到在扇形域 $-\pi+\alpha\leqslant\arg z\leqslant-\alpha<0$ 中的渐近解。这就完成了我们的例子的讨论。

有时，我们迂到具有实变量 x 以及含有参数 λ 的微分方程，但我们希望求一个当 $\lambda\to\infty$ 时的渐近解。例如，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 中考虑微分方程：

$$y''+[\lambda^2p(x)+q(x)]y=0,$$

其中 $q(x)$ 是連续的，并且 $p(x)$ 是正的，且有連续导数。我们可以作变量替换：

$$\xi=\int_a^x\sqrt{p(t)}\,dt,\qquad \eta=[p(x)]^{\frac{1}{4}}y.$$

则新的区间变作 $0\leqslant\xi\leqslant\beta=\int_a^b\sqrt{p(t)}\,dt$，并且微分方程变作：

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\lambda^2\eta=r(\xi)\eta,$$

这里 $r(\xi)$ 是一个连续函数：

$$r(\xi)=\frac{1}{p^3}\left[\frac{1}{4}pp''-\frac{5}{16}(p')^2-qp^2\right].$$

由习题 7.2 中指出的方法，可证 η 满足积分方程

$$\eta(\xi)=c_1\sin\lambda\xi+c_2\cos\lambda\xi+\frac{1}{\lambda}\int_0^\xi\sin\lambda(\xi-t)r(t)\eta(t)dt,$$

其中 $c_1=\eta(0)$ 及 $c_2=\eta'(0)/\lambda$. 现用逐次逼近法解积分方程如下：

$$\eta_0(\xi)=c_1\sin\lambda\xi+c_2\cos\lambda\xi,$$

$$\eta_n(\xi)=c_1\sin\lambda\xi+c_2\cos\lambda\xi+\frac{1}{\lambda}\int_0^\xi\sin\lambda(\xi-t)r(t)\eta_{n-1}(t)dt,$$

$n=1,2,3,\cdots$ 那末，如果 $|r(\xi)|\leqslant M$，则

$$|\eta_n(\xi)-\eta_{n-1}(\xi)|\leqslant\frac{M^n(|c_1|+|c_2|)\xi^n}{n!\lambda^n}\leqslant\frac{M^n(|c_1|+|c_2|)\beta^n}{n!\lambda^n}.$$

我们考虑级数

$$\eta(\xi)=\eta_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\eta_n(\xi)-\eta_{n-1}(\xi)],$$

将它与级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^n(|c_1|+|c_2|)\beta^n}{n!\lambda^n}$$

相比较，可知上述级数关于 x 为一致收敛。直接代入可证它是方程的解。其次，我们考虑

$$|\eta(\xi)-\eta_N(\xi)|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}[\eta_n(\xi)-\eta_{n-1}(\xi)]\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M^n(|c_1|+|c_2|)\beta^n}{n!\lambda^n} = O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right).$$

这就证明了到N项时 $\eta(\xi)$ 与 $\eta_N(\xi)$ 看作λ的一个函数时，有相同的渐近展开式。

习　　题　10.4

1.　证明，在变换 $w=ue^{-(1/2)\int p dz}$下，微分方程$w''+pw'+qw=0$ 变成以下形式

$$u''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)u=0,$$

并且在∞的普通点变成在∞处的正则奇异点，而在∞处的正则奇异点仍变为∞处的正则奇异点，

2.　考虑微分方程$w''+q(z)w=0$，其中

$$q(z)=q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\cdots,\quad q_1\neq 0.$$

作变量替换$u(\zeta)=\sqrt{z}\,w(z)$，$\zeta=\sqrt{z}$，并证明下述形式的付标准解

$$w=e^{a\sqrt{z}}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{(\frac{1}{4})-(\frac{1}{2})k}$$

存在。

3.　设$f(z)$ 在扇形域 $0<\alpha\leqslant\arg z\leqslant\pi-\alpha$ 中解析并有界。证明，在例 10.4.1 中，如果 $v_0=f(z)$，则经过迭代得到相同的解$v(z)$。怎样说明由它可以证积分方程解的唯一性？

4.　在例 10.4.1 中，试求出 $v_2(z)$ 的到两项的渐近展开式（过常数项），并证明它与形式解直到 c_2z^{-2} 项之前有相同的系数。

5.　利用 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 的幂级数展开式，证明对于固定的x，当 $\nu\to\infty$ 时有 $J_\nu(x)\sim\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu$.

参考文献

解析函数论

1. L. V. Ahlfors, Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

2. C. Caratheodory, Theory of Functions, I and Ⅱ. New York: Chelsea Publishing Company, 1954.

3. R. V. Churchill, Introduction to Complex Variables and Applications, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.

4. E. T. Copson, An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable. London: Oxford University Press, 1935.

5. P. Franklin, Functions of Complex Variables. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1958.

6. B. A. Fuchs and B. V. Shabat, Functions of a Complex Variable and some of their Applications, I. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964.

7. E. Hille, Analytic Function Theory, I and Ⅱ. Boston: Ginn and Company, 1959.

8. R. Knopp, Theory of Functions, I and Ⅱ plus 2 Vols. of problems. New York: Dover Publications. Inc.,

1945.

9. W. R, LePage, Complete Variables and the Laplace Transform for Engineers. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.

10. T.M.MacRobert, Functions of a Complex Variable. London, Macmillan and Company, Ltd., 1938.

11. R. S. Miller, Advanced Complex Calculus. New York, Harper and Brothers, 1960.

12. Z. Nehari, Introduction to Complex Analysis. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1961.

13. L.L. Pennisi, Elements of Complex Variables. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1963.

14. E. G. Phillips, Functions of a Complex Variable with Applications, 6th ed. Edinburgh, Oliver and Boyd, Ltd., 1949.

15. W. J. Thron, Introduction to the Theory of Function of a complex Variable. New York, John Wiley and Sons. Inc., 1953.

16. E.C. Titchmarsh, The Theory of Function, 2nd ed. London, Oxford University Press, 1939.

17. E.T. Whittaker and G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th ed. London, Cambridge University Press, 1952.

位势论和保角变换

1. L. Bieberbach, Conformal Mapping. New York, Chelsea Publishing Company, 1953.

2. C. Caratheodory, Conformal Representations.

London: Cambridge University Press, 1941.

3. O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory. New York: Dover Publications, Inc., 1953.

4. Kober, Dictionary of Conformal Representations. London: Admiralty Computing Service, British Admiralty, 1945.

5. S.G. Mikhlin, Integral Equations. New York: Pergamon Press, 1957.

6. N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations. Groningen, Holland: P. Noordhoff N. V., 1953.

7. Z. Nehari, Conformal Mapping. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952.

微分方程

1. G. Birkhoff and G. C. Rota, Ordinary Differential Equations. Boston: Ginn and Company, 1962.

2. E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.

3. J. W. Dettman, Mathematical Methods in Physics and Engineering. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

4. B. A. Fuchs and V. I. Levin, Functions of a Complex Variable and some of their Applications, Ⅱ. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

5. E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, New York: Dover Publication, Inc., 1956.

6. E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions Associated with Second Order Differential Equations, I and II. London: Oxford University Press, 1946.

7. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed. New York: The Macmillan Company, 1944.

Fourier 变换

1. G. A. Campbell and R. M. Foster, Fourier Integrals for Practical Applications. New York: D. Van Nostrand Company, 1948.

2. H. S. Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, 3nd ed. New York: Dover Publications, Inc., 1930.

3. J. W. Dettman, Mathematical Methods in Physics and Engineering. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

4. B. Noble, Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the solution of Partial Differential Equations. New York: Pergamon Press. 1958.

5. I. N. Sneddon, Fourier Transforms. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951.

6. E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, London: Oxford University Press, 1937.

Laplace 变换

1. H. S. Carslaw and J. C. Jeager, Operational

Methods in Applied Mathematics. New York: Dover Publications, Inc., 1963.

2. R.V. Churchill, Moden Operational Mathematics in Engineering, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.

3. D. L. Holl, C. G. Maple, and B, Vinograde, Introduction to the Laplace Transform, New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1959.

4. W. R. LePage, Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.

5. N. W. McLachlan, Complex Variable Theory and Operational Calculus with Technical Applications, 2nd ed, London: Cambridge University Press, 1953.

6. N. W. McLachlan, Modern Operational Calculus with Applications in Technical Mathematics. New York: Dover Publications, Inc., 1962.

7. E. J. Scott, Transform Calculus with an Introduction to Complex Variables, New York: Harper and Brothers, 1955.

渐近展开式

1. L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. New York: Academic Press, 1963.

2. N. G. DeBruijn, Asymptotic Methods in Analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958.

3. A. Erdelyi, Asymptotic Expansions. New York, Dover Publications, Inc., 1956.

4. T. Heading, An Introduction to Phase-Integral Methods. London; Methuen and Company Ltd., 1962.

5. H. Jeffreys, Asymptotic Approximations. London; Oxford University Press, 1962.

索　　引

A

B

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

R

S

T

U

V

W

010711

Z